Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Hanka Salavcová

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

October 17, 2023

Formální záležitosti

- informace k cvičení: kam.mff.cuni.cz/$\sim$cerny
- kontakt: cerny@kam.mff.cuni.cz
- literatura: Pavel Klavík: Povídání o lineární algebře
  - na stránkách cvičení
- Zápočet: získání 100bodů z domácích úloh
  - opět na stránkách
- Na co jsem zapomněl?

Soustavy lineárních rovnic

Zadání problému - Soustava lineárních rovnic

m rovnic o n neznámých

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Zadání problému - Soustava lineárních rovnic

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Názvosloví:

- a_{ij} ... *koeficienty*
- b_i ... *pravé strany*
- x_i ... *proměnné*
- $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ... *ohodnocení* soustavy
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ... *značení soustavy rovnic*

Problém: *Nalézt ohodnocení splňující soustavu rovnic (**řešení**)*

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Otázky:

1. *Jak problém řešit?*
2. *Jak vypadá množina řešení?*

Jak problém řešit?

1. Jak problém řešit?

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

1. zkoušením
   - neefektivní
   - jak volit ohodnocení?
   - V jakém vztahu jsou proměnné?
2. dosazováním

- $2x - y = -1$
- $-x + 2y - z = 3$
- $-y + 2z = 1$

1. vyjádření x z 1. rovnice
   - $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. dosazení do zbylých rovnic

Dosazování - příklad

- $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
- $-\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) + 2y - z = 3$
- $-y + 2z = 1$

1. vyjádření x z 1. rovnice
   - $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. dosazení do zbylých rovnic

Dosazování - příklad

- $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}y - z = \frac{5}{2}$
- $-y + 2z = 1$

1. vyjádření x z 1. rovnice
   - $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. dosazení do zbylých rovnic
3. úprava rovnic
4. vyjádření y z 2. rovnice
   - $y = \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}$
5. dosazení do třetí rovnice

- $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}y - z = \frac{5}{2}$
- $-\left(\frac{2}{3}z + \frac{5}{3}\right) + 2z = 1$

1. vyjádření x z 1. rovnice
   - $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. dosazení do zbylých rovnic
3. úprava rovnic
4. vyjádření y z 2. rovnice
   - $y = \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}$
5. dosazení do třetí rovnice
6. úprava rovnice

Dosazování - příklad

- $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{2}y - z = \frac{5}{2}$
- $z = 2$

1. vyjádření x z 1. rovnice
   - $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
2. dosazení do zbylých rovnic
3. úprava rovnic
4. vyjádření y z 2. rovnice
   - $y = \frac{2}{3}z + \frac{5}{3}$
5. dosazení do třetí rovnice
6. úprava rovnice
7. zpětná substituce: $y = 3$, $x = 1$

1. Jak problém řešit?

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

1. zkoušením
   - neefektivní
   - jak volit ohodnocení?
   - V jaké vztahu jsou proměnné?
2. dosazováním
   - výpočetně náročné
3. úpravou soustavy

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

1. ...odebereme rovnici?
   - množina řešení se může **zvětšit**
   - není žádoucí
2. ...přidáme rovnici?
   - množina řešení se může **zmenšit**
   - roste velikost soustavy
3. ...nahradíme rovnici?
   - množina řešení se může **změnit**
   - *může mít smysl, pokud zachováme množinu řešení*

Jak měnit rovnice soustavy?

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

1. nahodile
   - nemůžeme zanalyzovat, co se stalo
2. využít už existujících rovnic
   - $\implies$ kombinovat existující rovnice

Namísto...

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

raději...

- $A = B$
- $C = D$
- $\vdots$
- $E = F$

Cíl: Nahradit $A = B$, abychom zachovali existující řešení.

1. na základě informace z $A = B$
2. na základě informace z $A = B$ a $C = D$

1. Úprava $A = B$ na $\alpha A = \alpha B$, $\alpha \neq 0$
2. Úprava $A = B$ na $A + C = B + D$

Úpravy neměnící množinu řešení

Výše uvedené úpravy nemění množinu řešení.

Důkaz: *Úpravy nemění množinu řešení pokud se dají vrátit zpět.*

- **x** řeší $A = B \implies$ **x** řeší $\alpha A = \alpha B$
- **x** řeší $A = B \implies$ **x** řeší $A + C = B + D$
- množina řešení může být jenom větší

1. provedení úpravy (množina se v nejhorším zvětší)
2. provedení inverzní úpravy (množina se v nejhorším zvětší)
3. původní soustava $\implies$ úpravy nemění množinu řešení

Regulární rovnicové úpravy

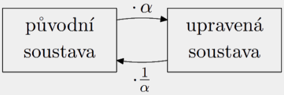
1. Úprava $A = B$ na $\alpha A = \alpha B$, $\alpha \neq 0$
2. Úprava $A = B$ na $A + C = B + D$

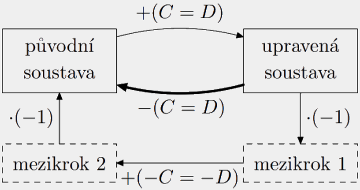
Úpravy neměnící množinu řešení

Výše uvedené úpravy nemění množinu řešení.

Důkaz: *Úpravy nemění množinu řešení pokud se dají vrátit zpět.*

1. provedení úpravy (množina se v nejhorším zvětší)
2. provedení inverzní úpravy (množina se v nejhorším zvětší)
3. původní soustava $\implies$ úpravy nemění množinu řešení





Regulární rovnicové úpravy

Rovnicové úpravy

1. $A = B$ na $\alpha A = \alpha B$, $\alpha \neq 0$,
2. $A = B$ na $A + C = B + D$, kde $C = D$ je součástí soustavy

nazýváme **regulární**, protože nemění množinu řešení. To je díky tomu, že je lze invertovat. Regulární úpravy jsou základem pro Gaussovu eliminaci.

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Otázky:

1. *Jak problém řešit?*
2. *Jak vypadá množina řešení?*

Jak vypadá množina řešení?

Jak vypadá množina řešení?

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ... *n-složkový vektor*
  - bod v $\mathbb{R}^n$

- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

1. pochopíme pro jednu rovnici
2. *Množina řešení* $= \bigcap_{\text{všechny rovnice}}$ *řešení rovnice*

Jak vypadá množina řešení jedné rovnice?

- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

Když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ ...

1. $b = 0$
   - $\implies$ všechna ohodnocení jsou řešení
2. $b \neq 0$
   - $\implies$ řešení neexistuje

Předpoklad: *Aspoň jedno z* $a_i \neq 0$.

$$ax = b$$

- $x = \frac{b}{a}$
  - $a \neq 0$ ... z předpokladu

Množina řešení soustavy o 1 proměnné

Množinu řešení $ax = b$ tvoří bod.

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

Postup: rozdělení případů

- $a_1 = 0$
  - $a_2x_2 = b \implies x_2 = \frac{b}{a_2}$
  - množina řešení $= \{(c, \frac{b}{a_2}) \mid c \in \mathbb{R}\}$
- $a_2 = 0$
  - $a_1x_1 = b \implies x_2 = \frac{b}{a_1}$
  - množina řešení $= \{(\frac{b}{a_1}, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$
- $a_1 \neq 0 \land a_2 \neq 0$
  - $a_1x_1 + a_2x_2 = b \implies x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$
  - množina řešení $= \{(x_1, -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$
  - Pro každé x_1 jednoznačně určena druhá souřadnice

Množina řešení soustavy o 2 proměnných

Množina řešení $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ tvoří přímku.

Množina řešení soustavy o 3 proměnných

Množina řešení $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ tvoří rovinu.

Důkaz: analogicky

- Búno $a_1 \neq 0$ (jinak se důkaz změní jen *kosmeticky*)
- $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 + \frac{b}{a_1}$
- pro $x_2 = x_3 = 0$
- $\implies (\frac{b}{a_1}, 0, 0)$

Množina řešení soustavy o 3 proměnných

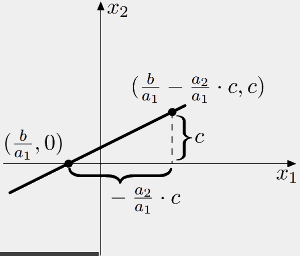
Množina řešení $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ tvoří rovinu.

Důkaz:

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 + \frac{b}{a_1}$$

- $(\frac{b}{a_1}, 0, 0)$

1. změníme x_2 o c
   - $\implies (\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}c, c, 0)$
   - lineární závislost 1. složky na 2. složce
   - s $c \in \mathbb{R}$ vygenerujeme přímku



Množina řešení soustavy o 3 proměnných

Množina řešení $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ tvoří rovinu.

Důkaz:

- $(\frac{b}{a_1}, 0, 0)$

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 + \frac{b}{a_1}$$

1. změníme x_2 o c
   - $\implies (\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}c, c, 0)$
   - lineární závislost 1. složky na 2. složce
   - s $c \in \mathbb{R}$ vygenerujeme přímku
2. změníme x_3 o d
   - $\implies (\frac{b}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}d, 0, d)$
   - lineární závislost 1. složky na 3. složce
   - s $d \in \mathbb{R}$ vygenerujeme přímku

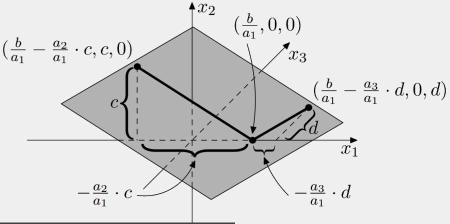
Množina řešení soustavy o 3 proměnných

Množina řešení $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ tvoří rovinu.

Důkaz:

- $(\frac{b}{a_1}, 0, 0)$

1. změníme x_2 o c $\implies$ $(\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}c, c, 0)$
2. změníme x_3 o d $\implies$ $(\frac{b}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}d, 0, d)$
3. změníme x_2 o c a zároveň x_3 o d
   - kombinace dvojice bodů z dvou přímek
   - $c \in \mathbb{R}$ a $d \in \mathbb{R}$ vygenerují celou rovinu



- podobná idea
- $\implies$ $(n-1)$-*rozměrná* množina (**nadrovina**)
  - 1 proměnná $\implies$ bod
  - 2 proměnné $\implies$ přímka
  - 3 proměnné $\implies$ rovina
  - 4 proměnné $\implies$ trojrozměrný podprostor prostoru $\mathbb{R}^4$
  - n proměnných $\implies$ $(n-1)$-*rozměrná* **nadrovina**

Závěr z řádkové interpretace

Řádková interpretace

Množina všech řešení každé rovnice tvoří nadrovinu a množina všech řešení soustavy je průnik několika nadrovin. Řešení mají hezkou geometrickou strukturu, jsou to vícerozměrná zobecnění objektů jako přímka nebo rovina.

Sloupcová interpretace množiny řešení

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Idea: *Zaměřme se na soustavu z pohledu jedné proměnné.*

Sloupcová interpretace množiny řešení - x_1

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

koeficienty, které násobí proměnná x_1

Sloupcová interpretace množiny řešení - x_2

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

koeficienty, které násobí proměnná x_2

Sloupcová interpretace množiny řešení - x_i

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

koeficienty, které násobí proměnná x_i

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mi}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

Klíčové pozorování

V soustavě násobí proměnná x_i pouze koeficienty z i-tého *sloupečku*.

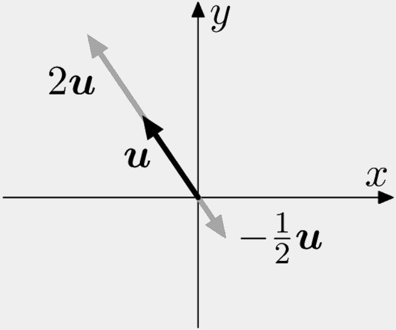
Klíčové pozorování

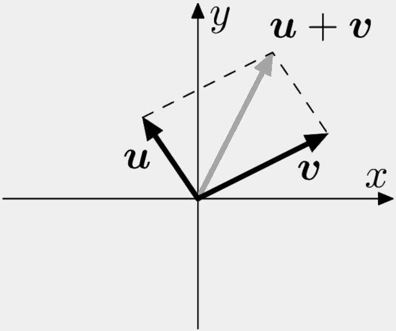
V soustavě násobí proměnná x_i pouze koeficienty z i-tého *sloupečku*.

- $\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ … *vektor i-tého sloupce*
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .. vektor pravých stran
- můžeme psát $x_i\mathbf{u}_i$
- tedy $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{b}$

1. $x_i\mathbf{u}_i$
2. $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$

Jak interpretovat tyto operace?





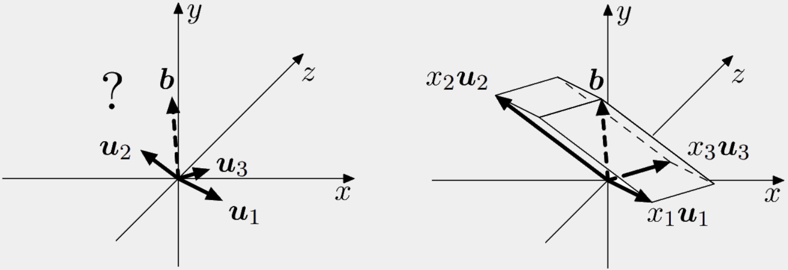
- 1. škálování vektoru

2. doplnění na rovnoběžník

Sloupcová interpretace množiny řešení

- $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{b}$

Co tedy reprezentuje tento problém?



Sloupcová interpretace

Hledáme skaláry $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, aby se násobky vektorů $x_1\mathbf{u}_1, x_2\mathbf{u}_2, \ldots, x_n\mathbf{u}_n$ sečetly na pravou stranu $\mathbf{b}$.

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ... *vektor*
  - $x_i \in \mathbb{R}$ ... *i-tá složka vektoru*
- Dvojice operací:
  1. **násobení vektoru skalárem**
     - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ \ \alpha \in \mathbb{R}$
     - $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
  2. **součet vektorů**
     - $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
     - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ... *standardní vektorový prostor*

Řádková interpretace

Množina všech řešení každé rovnice tvoří nadrovinu a množina všech řešení soustavy je průnik několika nadrovin. Řešení mají hezkou geometrickou strukturu, jsou to vícerozměrná zobecnění objektů jako přímka nebo rovina.

Sloupcová interpretace

Hledáme skaláry $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, aby se násobky vektorů $x_1\mathbf{u}_1, x_2\mathbf{u}_2, \ldots, x_n\mathbf{u}_n$ sečetly na pravou stranu $\mathbf{b}$.

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$
- $\vdots$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$

- mějme nějaká řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$

Umíme zkonstruovat další řešení bez nalezení celé množiny?

O konstrukci nových řešení soustavy rovnic

Mějme $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Poté

1. $\alpha\mathbf{x}^*$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a
2. $\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*$

jsou také řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Důkaz: $\mathbf{x}^*$ je řešením $\implies$ $\alpha\mathbf{x}^*$ je řešením

- i-tá rovnice: $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^* = 0$

- $a_{i1}\alpha x_1^* + a_{i2}\alpha x_2^* + \cdots + a_{in}\alpha x_n^*$
- $= \alpha a_{i1}x_1^* + \alpha a_{i2}x_2^* + \cdots + \alpha a_{in}x_n^*$
- $= \alpha(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) = \alpha 0 = 0$

O konstrukci nových řešení soustavy rovnic

Mějme $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Poté

1. $\alpha\mathbf{x}^*$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a
2. $\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*$

jsou také řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Důkaz: $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ je řešením $\implies$ $\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*$ je řešením

- i-tá rovnice: $a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^* = 0$
- i-tá rovnice $a_{i1}y_1^* + a_{i2}y_2^* + \cdots + a_{in}y_n^* = 0$

- $a_{i1}(x_1^* + y_1^*) + a_{i2}(x_2^* + y_2^*) + \cdots + a_{in}(x_n^* + y_n^*)$
- $= (a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) + (a_{i1}y_1^* + a_{i2}y_2^* + \cdots + a_{in}y_n^*)$
- $= 0 + 0 = 0$

Uzavřenost operací - vektorové podprostory

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ... standardní vektorový prostor
- $\mathcal{S}$ ... množina řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$
  2. $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ ... *uzavřenost na násobení skalárem*
  3. $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \mathcal{S} \implies \mathbf{x}^* + \mathbf{y}^* \in \mathcal{S}$ ... *uzavřenost na součet*

Vektorový podprostor

Množinu $W \subseteq \mathbb{R}^n$ uzavřenou na násobení skalárem a součet vektorů nazýváme **vektorový podprostor**.

Množina řešení soustavy s nulovou pravou stranou

Množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ tvoří vektorový podprostor.

Průnik vektorových podprostorů

Nechť $W_1, \ldots, W_n$ jsou vektorové podprostory $\mathbb{R}^n$. Potom jejich průnik $W = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,k\}} W_i$ je vektorový podprostor.

Důkaz:

- $\mathbf{u} \in W \implies \alpha\mathbf{u} \in W$
  1. $\mathbf{u} \in W \implies \forall i : \mathbf{u} \in W_i$
  2. $\implies \forall i : \alpha\mathbf{u} \in W_i$
  3. $\implies \alpha\mathbf{u} \in W$
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
  1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \implies \forall i : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_i$
  2. $\implies \forall i : \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_i$
  3. $\implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

- $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$: množina řešení je vektorový podprostor
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: množina řešení je ???
  - Zkusme využít $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$
  - vezmeme $W + \mathbf{p} = \{\mathbf{x} + \mathbf{p} \mid \mathbf{x} \in W\}$
  - Co je $\mathbf{p}$?
  - $\implies$ řešení $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$
  - $A(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$

Zbývá:

1. Proč to platí?
2. Jak $\mathbf{p}$ zvolit?

Množina řešení obecné soustavy

Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $W + \mathbf{p}$, kde:

- W ... množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$,
- $\mathbf{p}$ ... řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Důkaz: 1. $\mathbf{x}^*$ je řešením $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x}^* \in W + \mathbf{p}$

- Ukážeme $\mathbf{x}^* - \mathbf{p} \in W$
  - tedy $\mathbf{x}^* - \mathbf{p}$ řeší $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$
- pro i-tou rovnici:
- $a_{i1}(x_1^* - p_1) + a_{i2}(x_2^* - p_2) + \cdots + a_{in}(x_n^* - p_n)$
- $= (a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) - (a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{in}p_n)$
- $= b_i - b_i = 0$

Množina řešení obecné soustavy

Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $W + \mathbf{p}$, kde:

- W ... množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$,
- $\mathbf{p}$ ... řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Důkaz: 2. $\mathbf{x}^* \in W + \mathbf{p} \implies \mathbf{x}^*$ je řešením $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- $\mathbf{x}^* \in W + \mathbf{p}$, potom $\mathbf{x}^* - \mathbf{p} \in W$
  - $\mathbf{x}^* - \mathbf{p}$ řeší soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$
- pro i-tou rovnici:
- $a_{i1}(x_1^* - p_1) + a_{i2}(x_2^* - p_2) + \cdots + a_{in}(x_n^* - p_n) = 0$
- $(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) - (a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \cdots + a_{in}p_n) = 0$
- $(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) - b_i = 0$
- $\implies (a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \cdots + a_{in}x_n^*) = b_i$

Volba $\mathbf{p}$ pro $W + \mathbf{p}$

Množina řešení obecné soustavy

Množina všech řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je $W + \mathbf{p}$, kde:

- W ... množina řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$,
- $\mathbf{p}$ ... řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Otázka: *Jaké $\boldsymbol{p}$ zvolit?*

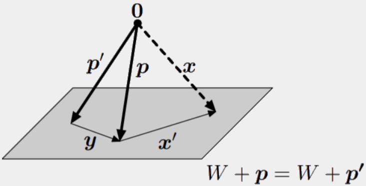
Volba $\mathbf{p}$ pro $W + \mathbf{p}$

Na volbě nezáleží

Pro $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvojici řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a W množinu řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ platí $W + \mathbf{p} = W + \mathbf{p}'$.

Důkaz: Ukážeme $W + \mathbf{p} \subseteq W + \mathbf{p}'$

- $\mathbf{x} \in W + \mathbf{p} \implies \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{p} \quad (\mathbf{x}' \in W)$

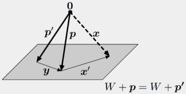


- mělo by platit: $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{y} + \mathbf{p}'$
- **klíčové:** $\mathbf{y} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W$

Na volbě nezáleží

Pro $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvojici řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a W množinu řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ platí $W + \mathbf{p} = W + \mathbf{p}'$.

Důkaz: Ukážeme $W + \mathbf{p} \subseteq W + \mathbf{p}'$

- $\mathbf{x} \in W + \mathbf{p} \implies \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{p} \quad (\mathbf{x}' \in W)$
- 

- mělo by platit: $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{y} + \mathbf{p}'$
- **klíčové:** $\mathbf{y} = \mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W$
  1. $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{p}$
  2. $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \mathbf{p}'$
     - $\mathbf{o} = -\mathbf{p}' + \mathbf{p}'$
  3. $\mathbf{x} = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}) + \mathbf{p}' \in W + \mathbf{p}'$
     - $\mathbf{x}' + \mathbf{y} \in W$

- $\mathbf{p} = \mathbf{o} \implies W + \mathbf{p} = W$

Afinní podprostor

Strukturu $W + \mathbf{p} = \{\mathbf{x} + \mathbf{p} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je vektorový podprostor nazýváme **afinní podprostor**. Vektorový podprostor je speciální případ afinního podprostoru.

Množina řešení obecné soustavy

Množinu řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvoří afinní podprostor.

Shrnutí popisu množiny řešení $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Řádková interpretace

Množina všech řešení každé rovnice tvoří nadrovinu a množina všech řešení soustavy je průnik několika nadrovin. Řešení mají hezkou geometrickou strukturu, jsou to vícerozměrná zobecnění objektů jako přímka nebo rovina.

Sloupcová interpretace

Hledáme skaláry $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takové, aby se násobky vektorů $x_1\mathbf{u}_1, x_2\mathbf{u}_2, \ldots, x_n\mathbf{u}_n$ sečetly na pravou stranu $\mathbf{b}$.

Afinní podprostory

Množina všech řešení libovolné soustavy tvoří afinní podprostor, což je vektorový podprostor posunutý z počátku.