1. PÍSEMKA Z OPTIMALIZACE

Hodně štěstí!

Na vypracování máte 90 minut, každý příklad je za 5 bodů. Nezapomeňte se podepsat. Můžete použít všechny tištěné materiály a kalkulačky, ale ne jiná elektronická zařízení (ani ta, co obsahují aplikaci kalkulačka). Pokud nestíháte dopočítat, popište postup Vašeho řešení.

Příklad první Mějme konvexní mnohostěn P v $\mathbb{R}^5$ určený systémem nerovnic:

$$\begin{array}{rrrrrr} 5x_1 & +10x_2 & -6x_3 & -2x_4 & -1x_5 & \geq 1 \\ 45x_1 & +62x_2 & +2x_3 & -22x_4 & -9x_5 & \geq 9 \\ 15x_1 & +22x_2 & -2x_3 & -10x_4 & -3x_5 & \leq 3 \\ 35x_1 & +46x_2 & -4x_3 & -16x_4 & -7x_5 & \geq 7 \\ 65x_1 & +94x_2 & -6x_3 & -34x_4 & -13x_5 & \geq 13 \\ 5x_1 & +5x_2 & -1x_3 & -2x_4 & -1x_5 & \leq 1 \\ 25x_1 & +58x_2 & +34x_3 & -6x_4 & -25x_5 & = 5 \\ -5x_1 & -16x_2 & -14x_3 & +0x_4 & +9x_5 & = 1 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Rozhodněte následující otázky a zdůvodněte odpovědi:

1. Leží bod $(0, 0, 0, 0, -1)$ uvnitř P?
2. Leží bod $(0, 2, 3/2, 2, 6)$ uvnitř P?
3. Je bod $(1, 1, 1, 2, 4)$ vrcholem P?
4. Má P dimenzi alespoň 3?
5. Změní se mnohostěn P, pokud z jeho popisu vypustíme následující nerovnici?

$$15x_1 + 22x_2 - 2x_3 - 10x_4 - 3x_5 \leq 3$$

Příklad druhý Mějme zadaný mnohostěn P jako v příkladu 1. Najděte alespoň 3 vrcholy P, které leží na fasetě určené nerovnicí:

$$5x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 1x_5 \geq 1$$

Příklad třetí Formulujte následující problém jako lineární program:

Potřebujeme určit vzdálenost dvou mnohostěnů

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq a\} \text{ a } Q = \{y \in \mathbb{R}^n | By \leq b\}$$

v pošťácké metrice: $\mathrm{dist}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Vzdálenost dvou mnohostěnů definujeme jako vzdálenost dvou nejbližších bodů x a y, kde $x \in P$ a $y \in Q$.

Definice: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d + 1$ afinně nezávislých bodů. Trojdimenzionálnímu simplexu říkáme *čtyřstěn*.

Příklad čtvrtý Mějme čtyřstěn S. Zvolme jeden libovolný vnitřní bod a_i z každé jeho fasety. Dokažte, že $\mathrm{conv}(a_1, a_2, \ldots)$ je čtyřstěn.

Definice: *Křížový mnohostěn* definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn*.

Příklad pátý Mějme křížový mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$. Odvoďte počet jeho k-dimenzionalních stěn.