

3. DŮ Z DISKRÉTKY

Relace a funkce

PŘÍKLAD PRVNÍ [2B]

Níže najdete různé způsoby zadání relací. Poté, co jim porozumíte, rozhodněte

- zda-li mají některé speciální vlastnosti (reflexivitu, symetrii, tranzitivitu, antisym.),
- jsou-li některé dvě isomorfní (totožné až na přejmenování prvků nosné množiny).

První relace je zadána čtvercovou maticí $n \times n$: prvky jsou elementy $x_1 \dots x_n$, na pozici $a_{(i,j)}$ se nachází 1, pokud $x_i R_1 x_j$, a 0 naopak.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Druhá relace je zadána přímo.

$$X = \{a, b, c, d\}; R_2 = \{aRb, bRa, aRa, dRb, bRd, aRd, dRa, cRc, bRb\}.$$

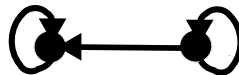
Třetí relace je zadána popisem:

Nosná množina relace (X, R_3) bude množina $\{1, 2, 3, 4\}$. Dva prvky x, y jsou v relaci R_3 (píšeme xR_3y), když platí:

$xR_3y \Leftrightarrow x$ a y jsou obě (klidně různé) mocniny dvojky, čili tvaru 2^i pro nějaké i celé.

Čtvrtá relace je zadaná operací: $R_4 = R_3 \cup \{(x, x) | x \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Nakonec pátá relace je zadána obrázkem, kterému později budeme říkat „graf“. Zatím stačí chápat, že body obrázku odpovídají prvkům relace a pokud je xR_5y , pak z x vede orientovaná šipka do y .



PŘÍKLAD DRUHÝ [2B]

Nechť S je relace soudělnosti na přirozených číslech bez 1, tedy: $mSn \equiv NSD(m, n) > 1$. Jaké vlastnosti má tato relace?

PŘÍKLAD TŘETÍ [1B]

Mějme tranzitivní a symetrickou relaci, pro kterou víme, že každý prvek je v relaci alespoň s jedním dalším. Dokažte, že pak se už jedná o ekvivalenci.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ [1B]

Dokažte, že pro každé konečné n a nosnou množinu $X, |X| = n$ platí, že funkce $f : X \rightarrow X$ je prostá, právě když je surjektivní.

PŘÍKLAD PÁTÝ [2B]

Označme $i_X : X \rightarrow X$ funkci nazývanou *identita na X*, definovanou nepřekvapivě $i_X(x) = x$. Nechť f je libovolná funkce z A do B . Dokažte, že platí:

- Funkce f je prostá, právě když existuje funkce $g : B \rightarrow A$ taková, že $g \circ f = id_A$.
- Funkce f je surjektivní, právě když existuje funkce $g : B \rightarrow A$ taková, že $f \circ g = id_B$.