2. DÚ Z DISKRÉTKY

Indukce

Příklad první – [2b]

Následuje tvrzení a jeho důkaz. Ověřte, že důkaz je v pořádku, a pokud ne, nalezněte přesně první místo v důkazu, které je v nepořádku. (Tedy nalezněte chybu v úvaze, nehledě na tom, že tvrzení nemusí vůbec platit.) Pozor na chytáky!

Tvrzení. Mějme přímky $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, n \geq 2$, každé dvě jsou různoběžné. Pak mají všechny společný bod.

Důkaz. Provedeme jej matematickou indukcí podle počtu přímek. Pro každé 2 přímky toto tvrzení platí, tedy základ indukce je v pořádku. Pokračujme indukčním krokem. Mějme $n+1$ přímek, zatímco víme, že pro n (a menší čísla) toto tvrzení už platí. Vezměme prvních n přímek (vynechejme poslední přímku), podle indukčního předpokladu mají právě jeden společný bod x. Pak vezměme posledních n přímek (vynechejme první přímku). Ty mají také podle indukčního předpokladu jen jeden společný bod, říkejme mu y. Vezměme si dvě přímky, které nejsou první ani poslední. Podle tvrzení jsou tyto dvě přímky různoběžné, tedy se protínají v právě jednom bodě. Z indukčního předpokladu ale máme, že se obě protínají jak v x, tak v y. Z toho plyne, že $x = y$ a indukce je dokončena pro $n+1$ přímek.

Příklad druhý – [2b]

Dokažte následující tvrzení:

Je-li x reálné číslo takové, že součet $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo, pak $\forall n$ přirozené je $x^n + \frac{1}{x}^n$ rovněž celé číslo.

Příklad třetí – [2b]

Dokažte indukcí de Moivrovu formuli, čili:

$\forall x$ reálné (nebo komplexní, chcete-li), $\forall n$ přirozené platí $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.