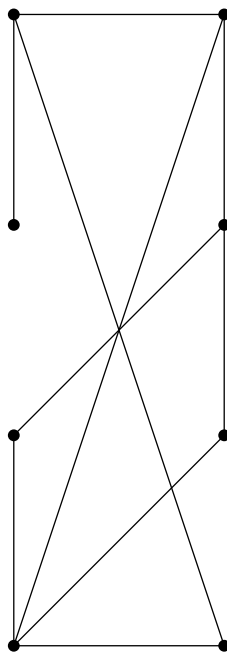


Vzorová písemka.

Na vypracování máte 90 minut. Nezapomeňte se podepsat a napsat variantu písemky. Můžete použít všechny tištěné materiály a kalkulačky, ale ne jiná elektronická zařízení (ani ta, co obsahují aplikaci kalkulačka). Výsledek by měl mít co nejjednodušší formu, co zvládnete vyjádřit, ale můžete používat známé matematické zkratky ( $\check{s}(n)$ ,  $\binom{n}{k}$ ,  $\{n\}_k$ ,  $F_i$  i další.)

**PŘÍKLAD PRVNÍ.** Nalezněte všechny kružnice liché velikosti, které jsou obsaženy (jako podgraf) v následujícím grafu:



Nezapomeňte zdůvodnit, že jsou všechny.

**PŘÍKLAD DRUHÝ.** Existuje dvojice grafů  $G$ ,  $G'$  taková, že  $V(G) = n$ ,  $G' = \overline{G}$  ( $G'$  je doplňkem  $G$ ) a  $|E(G)|, |E(G')| \leq cn$  pro nějakou konstantu  $c$ ? Rozhodněte a zdůvodněte.

**PŘÍKLAD TŘETÍ.** Mějme strom  $T$  na  $n$  vrcholech, který má všechny stupně rovny 1, 2 nebo 3. (Takovým stromům se říká *binární*.) Mějme také jeden speciální vrchol  $v_s \in V(T)$  pro který platí, že  $\deg(v_s) \leq 2$ . Zdefinujme si funkci  $h$  následovně:

„ $h(v)$  je délka cesty (měřeno počtem hran) z  $v_s$  do  $v$ ,  $h(v_s) = 0$ .“

Dokažte, že pro každý takový strom  $T$  a každý vrchol  $v_s$  platí, že  $\exists w \in V(T) : h(w) \geq \log_2 n$ .

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ.** Mějme graf  $G$ . Vytvořme z něj *graf hran*  $L_G$  podle následujícího popisu:

- vrcholy  $L_G$  jsou hrany  $G$ , čili  $V(L_G) = E(G)$ .
- hrany  $L_G$  jsou dvojice hran  $\{e_1, e_2\}$ , které jsou spojeny za stejný vrchol, čili  $\exists v \in V(G)$  takový, že  $v \in e_1 \wedge v \in e_2$ .

Dokažte, že graf se všemi stupni rovnými  $r$  bude mít graf hran  $L_G$ , který má také všechny stupně stejné. Odvoďte také vzoreček pro jeho stupně.

**PŘÍKLAD PÁTÝ.** *Artikulace* je vrchol, který když odebereme, tak se nám zvýší počet komponent o alespoň jedna. *Most* je hrana, kterou když odebereme, tak se nám zvýší počet komponent o alespoň jedna.

Buď  $|V| \geq 4$ . Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení:

- Obsahuje-li souvislý graf na  $|V|$  vrcholech artikulaci, obsahuje i most.
- Obsahuje-li souvislý graf na  $|V|$  vrcholech most, obsahuje i artikulaci.