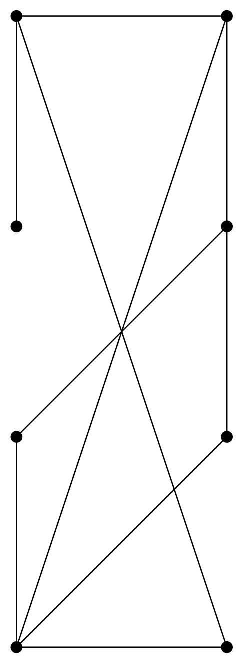
Vzorová písemka.

Příklad první. Nalezněte všechny kružnice liché velikosti, které jsou obsaženy (jako podgraf) v následujícím grafu:



Nezapomeňte zdůvodnit, že jsou všechny.

Řešení. Očíslujme si vrcholy zleva doprava, odshora dolů: 1,2,3,4,5,6,7,8. Průchodem do šířky (nebo jednoduchou úvahou) vidíme, že vrcholy $1, 4, 7$ spolu tvoří jednu partitu bipartitního grafu, a zbylé vrcholy druhou partitu. Tedy je graf bipartitní, a když je biparitní, neobsahuje žádnou lichou kružnici.

Příklad druhý. Existuje dvojice grafů G, G' taková, že $G' = \overline{G}$ (G' je doplňkem G) a $|E(G)|, |E(G')| \leq cn$ pro nějakou konstantu c? Rozhodněte a zdůvodněte.

Řešení. Dvojice neexistuje, protože platí, že součet hran v grafu a jeho doplňku je vždycky stejný, a roven $\binom{n}{2}$. To je číslo kvadratické, a tedy ho nejde rozdělit na dvě množiny $E(G)$, $E(G')$, které jsou obě jen lineární. Dvojice tedy nemůže existovat.

Příklad třetí. Mějme strom T na n vrcholech, který má všechny stupně rovny $1, 2$ nebo 3. (Takovým stromům se říká *binární*.) Mějme také jeden speciální vrchol $v_s \in V(T)$ pro který platí, že $deg(v_S) \leq 2$. Zadefinujme si funkci h následovně:

„$h(v)$ je délka cesty (měřeno počtem hran) z v_s do v, $h(v_s) = 0$. “

Dokažte, že pro každý takový strom T a každý vrchol v_s platí, že $\exists w \in V(T) : h(w) \geq log_2 n$.

Řešení. Průchodem do šířky z vrcholu v_s vidíme, že úroveň, ve které zrovna jsme v prohledávání, přesně odpovídá hodnotě funkce h. Protože každý vrchol sousedí nejvýše s 2 novými vrcholy (má stupeň nejvýše 3, a po jedné hraně jsme do něj vstoupili, pro vrchol v_s to platí z definice), tak v každé vrstvě i můžeme vidět pouze nejvýše 2^i vrcholů.

Nyní si všimneme, že první i, pro které platí, že $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^i \geq n$ je velikosti $\log n$. Je tedy vidět, že i kdyby všechny vrstvy měly 2^i vrcholů, je potřeba $\log n$ vrstev, a kdyby některá neměla, o to více vrstev je potřeba.

No a protože jsme už na záčátku viděli, že $h(z)$ odpovídá hloubce vrcholu z, dokázali jsme, že hloubka bude alespoň $\log n$ a tedy existuje vrchol w s $h(w) \geq \log n$, což jsme chtěli dokázat.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ. Mějme graf G. Vytvořme z něj *graf hran* L_G podle následujícího popisu:

- vrcholy L_G jsou hrany G, čili $V(L_G) = E(G)$.
- hrany L_G jsou dvojice hran $\{e_1, e_2\}$, které jsou spojeny za stejný vrchol, čili $\exists v \in V(G)$ takový, že $v \in e_1 \wedge v \in e_2$.

Dokažte, že graf se všemi stupni rovnými r bude mít graf hran L_G, který má také všechny stupně stejné. Odvoďte také vzoreček pro jeho stupně.

Řešení. Když mají oba vrcholy stupeň r a jen jedinou společnou hranu (z definice grafu), musí tedy tato hrana v grafu hran mít stupeň přesně $2r - 2$. To platí pro každou hranu.

PŘÍKLAD PÁTÝ. *Artikulace* je vrchol, který když odebereme, tak se nám zvýší počet komponent o alespoň jedna. *Most* je hrana, kterou když odebereme, tak se nám zvýší počet komponent o alespoň jedna.

Buď $|V| \geq 4$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

- Obsahuje-li souvislý graf na $|V|$ vrcholech artikulaci, obsahuje i most.
- Obsahuje-li souvislý graf na $|V|$ vrcholech most, obsahuje i artikulaci.

Řešení. První tvrzení neplatí: stačí spojit dvě libovolné kružnice tak, že sloučíte jeden vrchol z každé. Takto propojené kružnice stále neobsahují most, ale odstraněním společného vrcholu (artikulace) zvýšíte počet komponent.

Druhé tvrzení platí. Vezměme si v souvislém grafu most uv. Protože graf má alespoň čtyři vrcholy a je souvislý, u nebo v bude mít větší stupeň, než jedna. Předpokládejme, že je to u, a jeho druhý soused je w. Pak odebráním u odebereme i hranu uv, a díky tomu, že hrana uv byla mostem, nyní v je součástí jedné komponenty a w druhé. Počet komponent je nyní alespoň 2 a tvrzení platí.