

8. CVIČENÍ Z DM

Pokračování v grafojízdě

Stupeň vrcholu je počet hran, které z něj vedou – list má například stupeň 1. Pro graf definujeme minimální stupeň δ , průměrný stupeň d (jako $2|E|/|V|$) a maximální stupeň Δ .

ÚLOHA PRVNÍ Dokažte, že každý graf obsahuje cestu délky (s počtem hran) alespoň δ .

ÚLOHA DRUHÁ Dokažte, že graf obsahuje kružnici délky $\delta + 1$.

ÚLOHA TŘETÍ *Matice sousednosti* A pro graf G je taková matice, kde počet sloupců i řádků je $|V|$ a dva vrcholy i a j spolu sousedí hranou, právě když v matici je v místě A_{ij} jednička, na ostatních místech jsou nuly.

Matice incidence B pro graf G je taková matice, kde počet sloupců je $|E|$, počet řádků je $|V|$ a na pozici A_{ie} je jednička, pokud vrchol i je jedním ze dvou konců hrany e , nula jinak.

- Nalezněte matici sousednosti a incidence úplného grafu, prázdného grafu, bipartitního grafu (všechno pro parametr n , resp. m, n).
- Uvažme těleso Z_2 . (Máme čísla jen 0, 1, a $1 + 1 = 0$.) Představme si matici incidence B jako matici nad tělesem Z_2 . Zjistěte, jakou má souvislost pojem lineární nezávislost sloupců matice B s grafem. Odpovídají tyto sloupce něčemu? A co hodnota, odpovídá ta něčemu?
- Jak vypadá A^2 ? Na jakých políčkách A^n budou nulové hodnoty?

ÚLOHA ČTVRTÁ Nalezněte příklad nebo dokažte neexistenci následujících grafů:

- Graf s lichým počtem sudých stupňů;
- Graf se sudým počtem lichých stupňů;
- Graf s lichým počtem lichých stupňů.

ÚLOHA PÁTÁ Každý souvislý graf splňuje nerovnost $|E| \geq |V| - 1$. Tedy stromy jsou jakési minimální souvislé grafy. Říkáme, že graf je *les*, pokud je rozdělený do k komponent a bez kružnice. Nalezněte podobnou rovnici, kterou umíme popsat lesy.

ÚLOHA ŠESTÁ. Graf H nazveme *doplňkem* jiného grafu G na stejné množině vrcholů, má-li H hrany mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá, a naopak. Dokažte, že doplněk kteréhokoli bipartitního grafu s alespoň 7 vrcholy už není bipartitní. Lze najít i menší počet vrcholů, pro který toto tvrzení platí?

ÚLOHA SEDMÁ [2B] Dokažte, že graf má buď neorientovanou *Hamiltonovskou cestu* (cestu na všech jeho vrcholech), nebo v něm existuje cesta délky alespoň 2δ .