7. CVIČENÍ Z DM

Grafy, konečně

Definice: Graf je stromem, pokud je souvislý (z každého vrcholu se dá dostat do všech ostatních) a neobsahuje kružnici.

Příklad první. Co můžeme říci o stupních:

- prázdného grafu,
- úplného grafu,
- kružnice,
- úplného bipartitního grafu?

Příklad druhý Existuje graf s následujícími stupni? Pokud ano, nakreslete ho, pokud ne, zdůvodněte.

- $1, 1, 2, 4$?
- $2, 2, 2, 4, 4$?
- $1, 1, 3, 2, 2$?

Příklad třetí. Mějme v grafu *most*. To je hrana taková, že graf se po odebrání této hrany stane nesouvislým. Může kružnice obsahovat most? A může strom obsahovat most? Pokud ano, kolik nejméně? A kolik nejvýše?

Příklad čtvrtý. Kolik existuje vrcholů stupně jedna, tzv. listů, ve stromu?

- Nejprve dokažte, že pro každý strom (na aspoň dvou vrcholech) je alespoň jeden list.
- Pak dokažte, že pro každý strom velikosti aspoň dva existují alespoň dva listy.
- Nakonec ukažte, že každý strom obsahuje Δ listů, kde Δ je jeho nejvyšší stupeň.

Může vám pomoci „indukce podle počtu vrcholů“: Vezmete strom na $n + 1$ vrcholech, odeberete nějaký vhodně zvolený vrchol, tím se strom rozpadne na jeden nebo víc dalších stromů (na kolik se jich rozpadne, můžete ovlivnit tím, který vrchol smažete), na zbytek aplikujete indukci, pak vrchol vrátíte a úvahou potvrdíte, že hypotéza platí i pro původní strom.

Příklad pátý. Dokažte, že graf je stromem, právě když z každého vrcholu do každého vrcholu existuje právě jedna cesta.

Nápověda: Dokažte obě implikace ekvivalence s definicí stromu výše.

Příklad šestý. Dokažte, že graf je kružnicí, právě když z každého vrcholu do každého vrcholu vedou právě dvě cesty.

Příklad sedmý [1b] *Turnaj* je úplný orientovaný graf. To znamená, že pro dané n je T_n graf takový, že vezmeme K_n a ke každé hraně vybereme jeden směr (říkáme, že hranu zorientujeme).

Definujme dlouhou *Hamiltonovskou cestu* pro orientovaný graf na n vrcholech tak, že je to cesta na n vrcholech taková, že orientace šipek jsou na této cestě správně (od 1. do 2., od 2. do 3. ...). Je důležité, že tato cesta má stejně vrcholů, jako celý graf.

Dokažte, že každý turnaj na n vrcholech obsahuje alespoň jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf. (Hodí se k tomu například indukce.)

Příklad osmý [2b] Pokračování sedmé úlohy. Existuje nějaký turnaj, který má pouze jednu Hamiltonovskou cestu jako podgraf? Nalezněte jej. Co je zajímavější, je to, že takový turnaj existuje pouze jeden – dokažte, že pro každý turnaj, který není stejný jako onen protipříklad, už Hamiltonovské cesty existují alespoň dvě.