4. CVIČENÍ Z DM

Kombinatorické počítání: objekty

Úloha nultá Připomeňte si (z minulých cvičení a ze střední školy), kolik existuje následujících objektů:

- počet všech podmnožin libovolné n-prvkové množiny,
- počet všech k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny,
- počet všech relací na n-prvkové nosné množině,
- počet všech vydláždění šachovnice $2 \times n$ pomocí dominových kostek 2×1,
- všech funkcí z m-prvkové množiny do n-prvkové množiny,
- všech bijekcí z n-prvkové množiny do n-prvkové množiny,
- všech permutací na n-prvkové množině,
- kolik může být minimálně tříd ekvivalence pro ekvivalenci na n-prvcích? A kolik může být tříd maximálně?

Úloha první Na sídlišti se skví panelák s n patry. Správa domu se rozhodla ho vymalovat modrou a růžovou, z toho každé patro jednou barvou. Modrou můžeme použít bez omezení, ale růžová nesmí být na dvou po sobě jdoucích patrech. Kolik existuje způsobů, jak panelák vymalovat?

Úloha druhá

- Kolik existuje všech reflexivních relací na n prvkové množině?
- Kolik existuje všech symetrických relací na n prvkové množině?

Tip: Ukazovali jsme si reprezentaci relací pomocí matic. Jak jde na matici nahlédnout, že všech relací na n-prvkové množině je 2^{n^2}? Jak vypadají reflexivní, resp. symetrické relace v maticové reprezentaci?

Poznámka: Kolik je tranzitivních relací je obecně docela těžká úloha, proto se ji takticky vyhneme.

Úloha třetí Dokažte, že prostých funkcí z m-prvkové množiny do n-prvkové množiny ($n \geq m$) je právě $n^{\underline{m}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-m+1)$. Zapsat by se to také dalo jako $\binom{n}{m} \cdot m!$.

Funkce $f : M \to N$ je prostá, pokud pro každé dva $x, y \in M$ platí, že $f(x) \neq f(y)$.

Tip: Použijte indukci.

Další druh čísel, která budeme potřebovat, nazýváme *Stirlingova čísla druhého druhu*. Existují i prvního druhu, ale ty zde probírat nebudeme, proto jim budeme říkat *Stirlingova čísla*.

Ta se definují tak, že $\left\{ n \atop k \right\}$ znamená počet způsobů, jak rozepsat množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na disjunktní sjednocení k neprázdných množin.

Tedy $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ můžu napsat jako sjednocení jednoprvkové množiny a tříprvkové množiny (4 možnosti), nebo jako sjednocení dvou dvouprvkových (3 možnosti). Všimněte si, že na pořadí množin nezáleží, jen na jejich obsahu; $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ a $\{\{2, 4\}, \{1, 3\}\}$ se počítají jako jeden rozklad.

Úloha čtvrtá Spočítejte (zjednodušte výrazy):

$$\left\{ 0 \atop 0 \right\}, \left\{ n \atop 0 \right\}, \left\{ n \atop 1 \right\}, \left\{ n \atop n \right\}, \left\{ 5 \atop 3 \right\}, \left\{ n \atop 2 \right\}.$$

Úloha pátá Dokažte platnost vzorečku, který je podobný tomu pro kombinační čísla:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Tip: Pro $n = 0$ a $k = 0$ a n libovolné není co dokazovat, neboť není co s čím sečíst. Tedy předpokládejte, že n i k jsou větší nebo rovné jedné a pak jej dokažte odebráním jednoho elementu a počítacím argumentem: odeberu číslo n, kolik mám možností, jak jej vrátit (do nějakého rozkladu čísel $\{1, 2, 3, 4 \ldots, n-1\}$ a získat rozklad na k množin?

Úloha šestá Spočítejte počet surjektivních funkcí z m-prvkové množiny do n-prvkové množiny. Funkce $f : M \to N$ je surjektivní (neboli *na*), pokud $\forall z \in N \exists x \in M : f(x) = z$.

Tip: Proč je to až šestá úloha, když tematicky je podobná úloze třetí?

Úloha sedmá [2b] Spočítejte počet relací na n-prvkové množině, které jsou ekvivalencemi. Výsledek můžete zapsat jako sumu (kombinačních čísel, Fibonacciho čísel, atd.).