## Úloha první

Jaké vlastnosti mají relace:

- menší nebo rovno pro všechna přirozená čísla
- ostře menší než pro všechna přirozená čísla
- $a$ dělí $b$ pro všechna přirozená čísla.

## Úloha druhá

Dokažte, že když vezmu relaci $<$ pro nosnou množinu $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, pak existuje konečné $n$, že $R^n$ už bude prázdná relace. Platí to pro všechny druhy relací na $k$ prvcích?

$R^n$ chápeme jako $R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R$ ($n$-krát).

## Úloha třetí

- Nalezněte relace $R, S$ takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.
- Nalezněte relaci $R$ takovou, že $\forall n : R^n \neq R^{n+1}$.

## Úloha čtvrtá

Už máme několik vlastností relací (reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie) a několik operací s relacemi (sjednocení, průnik, doplněk, součin, složení). Udělejte si tabulku a zjistěte (dokažte nebo vyvraťte), které vlastnosti se zachovávají při operacích a které ne.

## Úloha pátá

Dokažte, že pro každou ekvivalenci existuje *rozklad na třídy ekvivalence* – že prvky v relaci můžeme rozdělit na disjunktní sjednocení hromádek, kde v každé hromádce je každý v relaci s každým a mezi hromádkami není nikdo v relaci s nikým.

**Tip:** Můžete použít indukci. Když odstraníme jeden element z nosné množiny a všechny dvojice s ním související, dostaneme menší ekvivalenci. Zbývá tedy ukázat, že když odtrhneme jeden prvek z nosné množiny, všichni jeho „sousedé“ se v indukci spojí do jedné třídy ekvivalence. (Jsou nějaké vztahy mezi těmito sousedy?)

## Úloha šestá

Dokažte, že pro každé konečné $n$ a nosnou množinu $X, |X| = n$ platí, že funkce $f : X \to X$ je prostá, právě když je surjektivní.

## Úloha sedmá

Označme $i_X : X \to X$ funkci nazývanou *identita na* $X$, definovanou nepřekvapivě $f(x) = x$. Nechť $f$ je libovolná funkce z $A$ do $B$. Dokažte, že platí:

- Funkce $f$ je prostá, právě když existuje funkce $g : B \to A$ taková, že $g \circ f = id_A$.
- Funkce $f$ je surjektivní, práve když existuje funkce $g : B \to A$ taková, že $f \circ g = id_B$.

## Úloha osmá [1.5b]

Zadefinujme si novou pomocnou množinu čísel, zvanou *Stirlingova čísla druhého druhu*. Zapisují se $\left\{ n \atop k \right\}$ a Stirlingovo číslo $n$ nad $k$ znamená počet způsobů, jak rozepsat množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na disjunktní sjednocení $k$ neprázdných množin.

Tedy $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$, protože $\{1, 2, 3, 4\}$ můžu napsat jako sjednocení jednoprvkové množiny a tříprvkové množiny (4 možnosti), nebo jako sjednocení dvou dvouprvkových (3 možnosti).

Nalezněte rekurentní vzorec pro Stirlingova čísla druhého druhu ne nepodobný tomu, co máme pro Fibonacciho nebo kombinační čísla. Nezapomeňte odvodit jeho správnost.

Stirlingova čísla druhého druhu se nám ještě budou hodit později, tak je nezapomeňte.