Diskrétní matematika

Pojmy

Množiny, relace

D(Potenční množina):$2^X \equiv$ systém všech podmnožin X.

D(Relace):R Relace na $X \equiv$ podmnožina kartézského součinu $X \times X$. Lidsky řečeno, nějaká množina uspořádaných dvojic z X.

D:Relace je *reflexivní*, pokud $\forall x \in X : (x, x) \in R$. (Zapisujeme xRx.)

D:Relace je *symetrická* $\equiv \forall x, y \in X : (xRy) \to (yRx)$.

D:Relace je *antisymetrická* $\equiv \forall x, y \in X, x \neq y : (xRy) \to \neg(yRx)$.

D:Relace je *tranzitivní* $\equiv \forall x, y, z \in X : (xRy \,\&\, yRz) \to (xRz)$.

D:Relace je *uspořádání* $\equiv$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní.

D:Relace je *ekvivalence* $\equiv$ je reflexivní, symetrická, tranzitivní.

Uspořádání

N:Většinou uspořádání značíme $(X, \leq)$, čili píšeme $x \leq y$ místo xRy.

D:*Řetězec* $C \subseteq X$ je množina prvků, ktere jsou všechny navzájem uspořádané, čili $\forall x, y \in C : x \leq y \vee y \leq x$. Obvykle jsou uspořádané za sebou.

D:*Antiřetězec* $A \subseteq X$ je množina prvků, kde ani jeden není menší než jiný, čili mezi sebou nemají žádné vztahy. $\forall x, y \in A, x \neq y : \neg(x \leq y \vee y \leq x)$.

Velikost největšího řetězce v uspořádání S značíme $\omega(S)$, velikost největšího antiřetězce $\alpha(S)$.

T(Dlouhý a široký):Pro uspořádání $S = (X, \leq)$ platí $\alpha(S)\omega(S) \geq |X|$.

T(Erdös-Szekerés):Každá posloupnost $n^2 + 1$ reálných čísel obsahuje monotónní posloupnost délky $n + 1$.

T(Dilworth):Každé uspořádání S jde plně pokrýt pomocí $\alpha(S)$ disjunktních řetězců.

Zobrazení

D:*Zobrazení* je jen jiný nazev pro funkci.

V diskrétní matematice budou obvykle zobrazení z konečné množiny M do konečné množiny N. Pozor, N není obor hodnot, zobrazení $f(x) = 2$ může být třeba z $\{1, 2, 3\}$ do $\{1, 2, 3\}$.

D:Zobrazení f je *prosté* $\equiv \forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$.

D:Zobrazení f je *surjektivní* $\equiv \forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$. Také se říká, že f je „na“.

D:Zobrazení f je *bijekce* $\equiv f$ je prosté a na.

Počítání

D(Faktoriál): $n! \equiv n \cdot (n-1) \cdots 1$.

D(Padající faktoriál): $n^{\underline{k}} \equiv n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.

D(Závorkové notace):$[k]$ nejčastěji $\equiv \{1, 2, \ldots, k\}$, ale také $[n = 1] \equiv 1$, pokud $n = 1$, a 0 jinak.

D(Kombinační čísla):

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!k!} = n^{\underline{k}}/k! = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

D(Stirlingova čísla 1. druhu):

$$\left[{n \atop k}\right] \equiv (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

D(Stirlingova čísla 2. druhu):

$$\left\{{n \atop k}\right\} \equiv k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$$

$$\left\{{n \atop k}\right\} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$$

D(Bellova čísla (počet ekvivalencí)):

$$B(n) \equiv \sum_{i=0}^{n}\left\{{n \atop i}\right\}$$

Fibonacciho posloupnost:

$$F_0 \equiv 0, F_1 \equiv 1, F_n \equiv F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}; \varphi = (1+\sqrt{5})/2.$$

Harmonická posloupnost:

$$H_0 \equiv 0, H_n \equiv \sum_{i=1}^{n} 1/i; H_n \approx ln\, n$$

Catalanova čísla/posloupnost:

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n}(C_i C_{n-i})$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

Binomická věta:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Zobecněná binomická věta (r reálné):

$$(x+y)^r = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}x^i y^{r-i}$$

Grafy

$G = (V, E)$ graf. Hrany $(a, b) \to$ *orientovaný graf. Multihrany* $\{a, b\}$, $\{a, b\}$ a *smyčky* $\{a, a\}$ se obvykle neuvažují. Značení: $n = |G| = |V|$ počet vrcholů, $m = ||G|| = |E|$ počet hran.

Úplný graf $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$. Je-li orientovaný, říká se mu *turnaj* (mezi 2 vrcholy turnaje je jen jedna or. hrana).

Bipartitní graf má dvě skupiny vrcholů, hrany jdou jen mezi skupinami (partitami). *Úplný bipartitní* $K_{m,n}$ má partitu velikosti m, partitu velikosti n, a hrany jsou všechny dvojice mezi nimi.

Kružnice C_n má vrcholy zapojene do řetězu. *Cesta* P_n je kružnice bez hrany.

G je *souvislý*, pokud se z každého vrcholu dostanu po hranách do každého jiného. Zobecněně: Graf je (hranově n. vrcholově) $(k+1)$-souvislý, pokud po odebrání k (hran n. vrcholů) je graf stále souvislý. Hrana n. vrchol je *kritická*, pokud jejich odebrání sníží k-souvislost. 1-kritická hrana je *most*, 1-kritický vrchol *artikulace*.

Graf T je *strom*, pokud je souvislý a bez kružnice. Graf je *les*, pokud je disj. sjednocení stromů. Každý strom je les, pro les platí $||T|| = |T| - c$, kde c je počet komponent.

Podgraf G' je nějaká podmnožina vrcholů grafu G a nějaká podmnožina těchto vybraných vrcholů. Podgraf je *indukovaný*, pokud vybereme všechny hrany, které mají oba konce v G' a jsou hranami G.

Klika je podgraf, který je také K_i pro nějaké i. *Nezávislá množina* je množina vrcholů, kde žádné dva spolu nesousedí. *Kostra* je největší podgraf co do počtu vrcholů, který je zároveň stromem. Velikost největší kliky se značí $\kappa(G)$, velikost největší nez. množiny $\alpha(G)$.

Techniky

Matematická indukce

Náhled na přirozená čísla:

- 0 je přirozené číslo. (1 též.)
- Pokud x je přirozené čislo, $x+1$ je také přirozené číslo.

Druhé pravidlo je ve formě implikace – to, že x je přirozené číslo, máme „zadarmo“ jako předpoklad. Stejným způsobem se dá nahlížet na cokoli, co má „uvnitř“ strukturu přirozených čísel.

Příklad 1: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.

- Základ indukce: $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1 = (0+1)^2$.
- Indukční krok: Dokazujeme implikaci. Předpokládem je, že vzorec $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)$ platí pro všechna čísla od 0 do n. Našim cílem je ukázat, že vzorec platí i pro hodnotu $n+1$.

  Standardní postup: Situaci (vzorec) pro $n+1$ upravíme na vzorec pro n a nějaký zbytek, vzorec pro n nahradíme pravou stranou pro n (indukční předpoklad) a pravou stranu pro n a zbytek upravíme na pravou stranu pro $n+1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = \left(\sum_{i=0}^{n}(2i+1)\right) + (2(n+1)+1) =$$

$$= (n+1)^2 + (2n+3) = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2.$$

Příklad 2: Mějme rovinu a na ni n přímek v obecné poloze (žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři se neprotínají ve stejném bodě). Pak tyto přímky rovinu sekají na $\binom{n+1}{2}+1$ oblastí.

- Základ indukce: Jedna přímka seká rovinu na 2 oblasti.
- Indukční krok: Dokazujeme implikaci. Máme v rovině $n+1$ přímek v obecné poloze. Víme, že když jednu odebereme, v rovině zbude n přímek a dostaneme $\binom{n+1}{2}$ oblastí (indukční předpoklad). Vrátíme tedy přímku do roviny, tato přímka má n průsečíků z ostatními přímkami a tedy protíná $n+1$ oblastí napůl, čili vznikne $n+1$ nových oblastí (zbytek). Sečteme:

$$\binom{n+1}{2} + 1 + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 = \binom{n+2}{2} + 1.$$

Postup řešení sumačního příkladu

Možnosti, co lze udělat:

- Zkusit malé případy, uhodnout výsledek, dokázat indukcí.
- Rozložit sumu různými způsoby (a la $\sum k/2^k$).
- Využít aritmetiku sum, vyměnit sumace.
- Použít binomickou větu.
- Když nic, tak aspoň vymyslet nějaké odhady.
- Bude: najít lineární rekurenci.
- Použít vytvořující funkce.
- Použít diskrétní integraci.

Známé sumy

$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{i+1}-1.$ $\quad\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1}+2.$ $\quad\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n.$

$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$ $\quad\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+i}{k-i-1} = F_{2k}.$

$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+i}{k-i} = F_{2k+1}.$ $\quad\sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1/2)(n+1)/3.$

$\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2.$ $\quad\sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = 2.$

$\sum_{i=0}^{\infty} i/2^i = 2.$

Princip inkluze a exkluze

Velikost sjednocení můžeme počítat pomocí postupného přičítání a odčítání větších a větších průniků (jejichž velikosti budou menší). Zapsáno matematicky:

$$|\bigcup_{1\dots n} A_i| = \sum_{j\geq 0}(-1)^j \sum_{I\in\binom{1\dots n}{j}} |\bigcap_{I} A_i|$$

Příklad: Spočítejte počet rozmístění 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby žádné 4 neležely na stejném řádku nebo sloupci.

Myšlenka inkluze a exkluze spočívá v tom, že umíme náš problém rozdělit na nějaké části pomocí pravidelnosti. Obecně *jev* (pojem z pravděpodobnosti) bude nějaká událost, kterou budeme chtít spočítat nebo vyjádřit. Úkol se nás tedy ptá na:

$|A|$, kde $A = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, že žádné 4 neleži na stejném řádku nebo sloupci$\}$.

x je tedy onen jev, který chceme spočítat. Všimněme si, že ho můžeme rozdělit na menší kusy pomocí logických spojek $\wedge$, $\neg$ a $\vee$:

$A = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů tak že 4 nejsou na prvním řádku $\wedge$ 4 nejsou na druhém řádku $\wedge$ 4 nejsou na třetím řádku $\dots\}$.

Vidíme, že naše jevy umíme rozložit na menší části pomocí operace $\wedge$. Úplně stejně umíme rozložit i množinu A, akoráte pomocí operace $\cap$ (není náhoda, že vypadá jako $\wedge$:

Pokud $A_i \equiv \{x; x$ je množina rozložení 8 kamenů tak, že 4 nejsou na i-tém řádku $\}$ a $B_i \equiv \{x; x$ je množina rozložení 8 kamenů tak, že 4 nejsou na i-tém sloupci $\}$, tak

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4.$$

Poslední potíž máme s tím, že princip inkluze a exkluze počítá průniky a ne sjednocení. Na to nam ale pomohou De Morganova pravidla, platí totiž:

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \dots$$

Pokud přecházíme z původního problému na problém opačný, často se říká, že počítáme *špatné jevy* – zde je vidět proč, $\overline{A_1} = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů na šachovnici tak, že 4 kameny **jsou** na prvním řádku.$\}$.

Velikosti jednotlivých špatných jevů spočítáme snadno úvahou: $|\overline{A_i}| = |\overline{B_i}| = \binom{12}{4}$.

Protože kamenů je jen 8, tak mohou být max. dva řádky nebo sloupce najednou zaplněny. Z toho máme $|\overline{A_i}\cap\overline{A_j}| = |\overline{B_i}\cap\overline{B_j}| = 1$ a velikosti průniků trojic a výše už jsou nulové. Ještě si rozmyslíme, že průnik řadku a sloupce není nulový: $|\overline{A_i}\cap\overline{B_j}| = \binom{9}{1}$.

Nyní aplikujeme princip inkluze a exkluze, jak ho známe:

$$|\overline{A}| = |\bigcup \overline{A_i}| = \sum_i |\overline{A_i}| + \sum_i |\overline{B_i}| - \sum_{i,j} |\overline{A_i}\cap\overline{A_j}| -$$

$$- \sum_{i,j} |\overline{B_i}\cap\overline{B_j}| - \sum_{i,j} |\overline{A_i}\cap\overline{B_j}| + 0 - 0 \dots$$

Diskrétní integrace

Místo derivace bereme diferenci, její ekvivalent v konečném světě:

$$\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x).$$

Potom platí, že pokud chceme vyřešit sumu $\sum_{i=a}^{b} g(i)$, pak musíme „diskrétně integrovat“ – najít funkci, jejíž diference splňuje $\Delta(f(x)) = g(x)$. Pak vzorec pro sumu je $f(b+1) - f(a)$, podobně, jako je to v reálném integrálním počtu.

Také víme, že diference x^n se chová ošklivě, ale funkce $x^{\underline{n}}$ má diferenci podobnou, jako derivace x^n:

$$\Delta(x^{\underline{n}}) = nx^{\underline{n-1}}.$$

Z tohoto faktu pak

$$\sum_{i=0}^{n} i^{\underline{r}} = \frac{(n+1)^{\underline{r+1}}}{r+1}.$$