Lineární algebra II - Písemka 3.4.

Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. Rozhodněte, zda je matice diagonalizovatelná a případně napište její diagonální tvar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejprve připomeňme, že matice je diagonalizovatelná právě tehdy když pro každé vlastní číslo platí, že dimenze prostoru jemu příslušných vlastních vektorů je rovna jeho násobnosti. Navíc dimenze prostoru vlastnich čísel je vždy menší rovna násobnosti.

Matici ze zadání označme A. Začneme výpočtem jejích vlastních čísel.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)$$

Vlastní čísla tedy jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0$, kde λ_1 je dvojnásobné. Nyní k vlastním číslům spočteme vlastní vektory.

Vlastní vektory pro λ_1 hledáme jako řešení jako soustavy rovnic $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -\lambda_1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Máme dvě volné proměnné a z posledního řádku vyjádříme $v_1 = 4v_2 + 3v_3$. Tedy řešní soustavy je

$$v = p_1(4,1,0)^T + p_2(3,0,1)^T.$$

Vidíme, že vlastní vektory příslušné k číslu 2 tvoří podprostor prostor dimenze 2 a bazí jsou například vektory $(4,1,0)^T$ a $(3,0,1)$.

Všimneme si, že 2 je dvojnásobné vlastní číslo a současně jemu příslušné vlastní vektory tvoří podprostor stejné dimenze, jako je jeho násobnost. Navíc 0 je vlastní číslo s násbností jedna – neb je vlastní číslo, musí mít alespoň jeden vlastní vektor a tudíž minimální možná dimenze prostoru vlastních čísel je jedna. Tedy speciálně pro 0 to je jedna. Z toho již teď můžeme odvodit, že matice je diagonalizovatelná.

Nicméně budeme ještě pokračovat výpočtem vlastních vektorů k druhému vlastnímu číslu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -\lambda_2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Třetí proměnná je volná a první dvě jsou rovny nule. Tedy soustava má řešení $v = p_1(0,0,1)^T$ a bazí prostoru vlastních vektorů je například vektor $(0,0,1)^T$.

Na závěr se vraťme k diagonalizaci. Je splněna podmínka pro diagonalizovatelnost matice - viz. první odstavec řešení. Tedy matice je diagonalizovatelná. Diagonální tvar obecně je

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

a v našem případě pak

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ale pořadí prvk na diagonále není přesně určené, tedy správně by byl i tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$