Lineární algebra II - 17.4. CV 8

Hledání Jordanův tvar pro matici matici A. Víme, že $A = RJ_AR^{-1}$. Vezměme vlastní číslo λ_i. Vypozorujeme, že $R(J_A - \lambda_i I)R^{-1} = RJ_AR^{-1} - R\lambda_i IR^{-1} = A - \lambda_i I$. Tedy $J_A - \lambda_i I$ a $A - \lambda_i I$ jsou podobné a tudíž mají stejnou hodnost. Stejně tak matice $(J_A - \lambda_i I)^j$ a $(A - \lambda_i I)^j$. Teď stačí studovat, jak se měňí hodnost matice $(J_A - \lambda_i I)^j$ v závislosti na j. Její hodnost pak budeme počítat pomocí jako hodnost matice $(A - \lambda_i I)^j$.

- $h(J_A) - h(J_A - \lambda_i I)$ je počet Jordanových buněk, kde se vyskytuje λ_i.
- $h(J_A - \lambda_i I) - h((J_A - \lambda_i I)^2)$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň 2, kde se vyskytuje λ_i.
- $h((J_A - \lambda_i I)^2) - h((J_A - \lambda_i I)^3)$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň 3, kde se vyskytuje λ_i.
- $h((J_A - \lambda_i I)^i) - h((J_A - \lambda_i I)^{i+1})$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň $(i+1)$, kde se vyskytuje λ_i.

Pozn: Pro $\lambda_i = 0$ je to cele posunuté.

I) Nalezněte Jordanův tvar pro matici A.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení: $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Řešení: $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Řešení: $J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

II) Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (1, 1+i), \mathbf{y}^T = (2i, a+bi)$ (parametry a, b jsou reálná čísla)
b) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3), \mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$
c) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2), \mathbf{y}^T = (1, -3, -2)$
d) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4), \mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$
e) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1), \mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$
f) $\mathbf{x}^T = (2+i, 0, 4-5i), \mathbf{y}^T = (1+i, 2+i, -1)$

III) Nechť je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

b) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3), \mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$
c) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2), \mathbf{y}^T = (1, -3, -2)$
d) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4), \mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$
e) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1), \mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$
f) $\mathbf{x}^T = (2+i, 0, 4-5i), \mathbf{y}^T = (1+i, 2+i, -1)$

IV) Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a|g_b\rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x)g_b(x)dx$.

V) Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

VI) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 12, \|\mathbf{v}\| = 5$. Navíc $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v} \rangle = 0$. Určete $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

VII) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 13, \|\mathbf{v}\| = 19, \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 24$. Určete $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Všimni si, že zadání splňuje trojúhelníkovou nerovnost.

VII) Nechť $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Navíc $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v} \rangle = 0$. Tedy jsou na sebe kolmé. Určete α tak, že vektory $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ svírají úhel $\pi/6$.

VIII) Určete úhel mezi dvojicemi vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus). Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý:

a) $\mathbf{x} = (1, -4)^T, \mathbf{y} = (8, 2)^T$
b) $\mathbf{x} = (3, 2, -2)^T, \mathbf{y} = (0, 4, 1)^T$
c) $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T, \mathbf{y} = (1, 0, -1)^T$
d) $\mathbf{x} = (3, 4)^T, \mathbf{y} = (-1, 0)^T$