Lineární algebra II - 27.3. CV 5

Pro prvočíslo p a $a \neq 0$ platí:

$$a^{p-1} \equiv 1(\mod p)$$

Vlastní číslo λ čtvercové matice A splňuje $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Také je kořen charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Matice řádu n je diagonalizovatelná právě když má n vlastních čísel a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

Součin vlastních čísel matice A je roven determinantu A. Součet vlastních čísel matice A je roven stopě A (součet prvků na diagonále).

I) V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom, stupně nejvýše p, který nabývá stejných hodnot.

a) V tělese $\mathbb{Z}_5$, $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.

Řešení: $4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$

b) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

Řešení: $x^6 + x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

II) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení: $-1 + i(1, 1 + i); -1 - i(1, 1 - i)$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Řešení: $9(5, 2); -5(-1, 1)$

III) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Řešení: $-1, (1, 1, -1)$ neni diagonalizovatelna

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: $2, (1,0,0); 1(1,0,1); -1(0,-1,1)$, je diag

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: 4(1,1,1); -2,(-2,1,1) (1,-2,1), JE diag

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Řešení: 3,3(1,-2,1); 0(4,4,1), neni diag

IV) Určete vlastní čísla matice

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

.

Řešení: polynom $(2-t)(1-t)^3(1+t)$. Vlastní čísla matice K jsou 2, 1 (trojnásobné) a -1.

V) U matice $H = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$ 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Řešení: 7