Lineární algebra II - 30.4. CV 9

Jordanův tvar Hledání Jordanův tvar pro matici matici A. Víme, že $A = RJ_AR^{-1}$. Vezměme vlastní číslo λ_i. Vypozorujeme, že $R(J_A - \lambda_i I)R^{-1} = RJ_AR^{-1} - R\lambda_i IR^{-1} = A - \lambda_i I$. Tedy $J_A - \lambda_i I$ a $A - \lambda_i I$ jsou podobné a tudíž mají stejnou hodnost. Stejně tak matice $(J_A - \lambda_i I)^j$ a $(A - \lambda_i I)^j$ platí, že jsou podobné - uvaž $R(J_A - \lambda_i I)R^{-1}R(J_A - \lambda_i I)R^{-1} = (A - \lambda_i I)(A - \lambda_i I)$. Teď stačí studovat, jak se měňí hodnost matice $(J_A - \lambda_i I)^j$ v závislosti na j. Její hodnost pak budeme počítat pomocí jako hodnost matice $(A - \lambda_i I)^j$.

- $h(J_A) - h(J_A - \lambda_i I)$ je počet Jordanových buněk, kde se vyskytuje λ_i.
- $h(J_A - \lambda_i I) - h((J_A - \lambda_i I)^2)$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň 2, kde se vyskytuje λ_i.
- $h((J_A - \lambda_i I)^2) - h((J_A - \lambda_i I)^3)$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň 3, kde se vyskytuje λ_i.
- $h((J_A - \lambda_i I)^i) - h((J_A - \lambda_i I)^{i+1})$ je počet Jordanových buněk velikosti alespoň $(i+1)$, kde se vyskytuje λ_i.

Pozn: Pro $\lambda_i = 0$ je to celé posunuté.

Gramova-Schmidtova ortonormalizace Hledání ortonormální báze (všechny prvky báze jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost).

Vsupt: vektory $u_1, \dots, u_n$
$w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_i | v_j \rangle v_j$
$v_i = \frac{w_i}{} \|w_i\|$
Výstup: ortogonální baze $v_1, \dots, v_n$

i-tá souřadnice vektoru x vzhledem k ortonormální bazi $v_1, \dots, v_n$ je $\langle v_i | x \rangle$

I) Nalezněte Jordanův tvar pro matici A.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

II) V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ prostoru s bazí

a) $B = \{\mathbf{x}^T = (1,1,1,1), \mathbf{y}^T = (4,1,4,1), \mathbf{z}^T = (1,2,3,4)\}$.

b) $B = \{(0,3,4,0)^T, (0,0,5,0)^T, (2,1,0,2)^T\}$

,

c) $B = \{(2,4,2,1)^T, (-1,-2,-2,-1)^T, (1,2,4,2)^T, (1,2,3,4)^T\}$

III) Rozšiřte ortonormální bázi Z z předchozího příkladu na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

IV) Pro prostor z příkladu I) určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2,2,1,5)^T$ a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

V) Určete vzdálenost bodu $A = (5,5,3,3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8,-1,1,-2)^T$ a $C = (4,-2,2,-1)^T$.

VI) Najděte bazi ortogonálního doplňku prostoru W s bazí $B = \{(1+i, 2, 0, -1)^T, (i, 1, -i, 2)^T\}$. Řešte v $\mathbb{C}^4$.