Lineární algebra II - 9.4. CV 6

Součin vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ je roven determinantu $\mathbf{A}$. Součet vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ je roven stopě $\mathbf{A}$ (součet prvků na diagonále).

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou podobné, pokud existuje regulární matice $\mathbf{R}$, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{RBR}^{-1}$. Matice $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici $\mathbf{D}$. Speciálně platí $\mathbf{A} = \mathbf{RDR}^{-1}$, kde $\mathbf{D}$ má na diagonále vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{R}$ je matice složená z příslušných vlastních vektorů (po sloupcích, pozice odpovídají).

I) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

II) Určete vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

.

III) U matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$ 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

IV) Nechť matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají společnou bázi z vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{B}$. Dokažte, že také matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ a $\mathbf{AB}$ mají stejnou bázi vlastních vektorů. Jaká jsou jejich vlastní čísla? Dále rozhodněte, zda platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

V) Jak obecně spočítat k-tou mocninu diagonalizovatelné matice? Spočtěte tak druhou mocninu a odmocninu z následujících matic.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

VI) Spočtěte vlastní čísla matice sousednosti úplného grafu na n vrcholech K_n. Matice incindence grafu je matice $n \times n$ indexovaná řádky i sloupce pomocí vrcholů grafu a obsahuje 1 když odpovídající vrcholy jsou spojené hranou a 0 jinak. Specálně diagonála je vždy nulová.

VII) Rozhodněte, zda jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VIII) Nalezněte Jordanův tvar pro matice.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$