Lineární algebra II - 12.3. CV 2

Připomenutí: Pro permutaci bychom měli umět spočítat/zjistit:

- cykly
- rozklad na transpozice (prohození dvou prvků)
- znaménko $-1^{\text{počet sudých cyklů}} = -1^{\text{počet transpozic}}$
- inverzní permutaci
- skládání permutací

I) Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p, q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jeko zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2), q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$

b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9), q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 4, 2, 6)$

c) $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6), q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$

II) Proč má inverzní permutace p^{-1} "stejné" cykly, počet inverzí i transpozic a tím pádem i znaménko jako původní permutace p?

III) Pro permutaci $p = (8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 7)$ určete permutaci p^{387}.

alternativně i pro permutace z příkladu I).

IV) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete $sgn(n, n-1, n-2, n-3, ..., 3, 2, 1)$.

V) Trochu zajímavější determinanty. Matice berte jako $n \times n$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

VI) Spočtěte následující determinant matice velikosti $2n \times 2n$

a) jak umíte

b) rozvojem podle řádků či sloupců.

Příklad pro $n = 3$.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

VII) Jsou-li čísla 697, 476 a 969 dělitelná 17 (a to jsou), je také determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ dělitelný 17?

Zkuste úlohu řešit jinak, než výpočtem determinantu a ověření, že je dělitelný.

VIII) S využitím determinantu zjistěte, kdy je dimenze lineárního obalu vektorů $\{(1, a, 1, a)^T, (1, -1, 1, a)^T, (a, 1, 1, 1)^T, (a, 0, 0, -a)^T\}$ rovna 4.