Lineární algebra II - 14.5. CV 11

Matice A je hermitovská, pokud $A = A^H = \overline{A}^T$. Hermitovská matice A velikosti $n \times n$ je *pozitivně definitní*, pokud pro všechna nenulová $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} > 0$ a *pozitivně semidefinitní*, pokud $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} \geq 0$.

Matice $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a}^H \\ \mathbf{a} & A' \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní, pokud $\alpha > 0$ a

$$A_1 = A' - \frac{1}{\alpha}\mathbf{a}\mathbf{a}^H$$

je pozitivně definitní.

Algoritmus pro Choleského rozklad, kde chceme vyjádřit pozitivně definitní matici A jako $U^H U$, kde U je horní trojúhelníková. Postupně vyplňujeme řádky U:

- $u_{i,i} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$
- $u_{i,j} = \frac{1}{u_{i,i}}\left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} u_{k,i}\right)$ pro $i < j$.

Při rozkladu na diagonále ($u_{i,i}$) vycházejí pod odmocninou vždy kladná reálná čísla. Pokud vujde záporné či 0, matice A není pozitivně definitní.

Alternativně lze použít Jacobyho podmínka (Sylvestrovo kritérium), které říká, že A je pozitivně definitní, pokud determinanty všech čtvercových podmatic, které obsahují levý horní roh jsou > 0. [To ale cvičit nebudeme.]

I) Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní a pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

II) Spočtěte Choleského rozklad matice F a použijte ho k řešení soustavy $F\mathbf{x} = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

III) Ukažte, že pro pozitivně definitní matice A a B jsou matice $A + B$ a A^{-1} pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že A je regulární).

IV) Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice

$$G = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní?

V) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy na $\mathbb{R}^3$ vůči kanonické bázi. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž formu.

VI) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy vůči kanonické bázi. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž formu.

Oproti předchozímu příkladu řešte nad $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ (číslo 2 v $\mathbb{Z}_2$ odpovídá 0).