

Pozorně si přečtete zadání. Zdůvodňujete svá tvrzení. Kdo má hotovo, odevzdává a jde domů. Odevzdané papíry podepište a přidejte email. Výsledky budou emailem. A hlavně - **PODEPIŠTE** papíry a napište **VARIANTU**.

I) Pomocí Gaussovy eliminační metody spočtete všechna řešení soustavy rovnic. Řešte nad  $\mathbb{Z}_5$ .

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

II) Nechť  $V$  je vektorový prostor a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá a své odpovědi zdůvodněte.

- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.
- Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.
- Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

III) Nechť  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny vektorů lineárně závislé či nezávislé.

- $X_1 = \{u, u + v, u + w\}$
- $X_2 = \{u + v, u - v, w\}$
- $X_3 = \{u + v, u - v, u + w, u - w\}$
- $X_4 = \{u + v, u + w, v + w\}$
- $X_5 = \{u - v, u - w, v - w\}$
- $X_6 = \{u - 2v + w, 3u + v - 2w, 7u + 14v - 13w\}$
- $X_7 = \{u, 2u, w\}$
- $X_8 = \{u, v + w\}$

IV) Určete k permutacím  $p$  a  $q$  následující:

- grafy (obrázky se šipkami)
- rozklady na cykly (cyklický zápis)
- rozklady na transpozice (nesplést pořadí)
- počty inverzí
- znaménka
- inverzní permutace

Dále určete složení permutací  $q \circ p$  a  $p \circ q$ . Při skládání se první aplikuje ta vpravo. Označte zřetelně označte co je co. Nenechte opravujícího na pochybách.

$$p = (8, 1, 6, 2, 4, 7, 5, 3), q = (5, 7, 3, 8, 4, 6, 2, 1)$$

---

V) Mějme vektorový podprostor  $V \subseteq \mathbb{Z}_5^4$  s bazí  $B$ . U vektorů  $u_1, u_2$  a  $u_3$  určete jejich souřadnice vzhledem k  $B$ , pokud náležejí do  $B$ .

$$B = ((3, 2, 3, 1)^T, (1, 1, 0, 2)^T, (3, 3, 3, 3)^T)$$
$$u_1 = (2, 1, 1, 1)^T, u_2 = (3, 1, 4, 0)^T, u_3 = (0, 4, 3, 0)^T$$

---

VI) Nechť  $U$  je vektorový podprostor  $\mathbb{Z}_5^4$ . Určete dimenzi  $U$ , nalezněte bázi  $U$  a vyjádřete vektor  $u$  vzhledem k nalezené bázi.

$$U = \mathcal{L}((4, 2, 1, 0)^T, (3, 3, 2, 1)^T, (0, 2, 3, 4)^T)$$
$$u = (0, 4, 0, 1)^T$$

---

VII) Nechť  $V$  je vektorový podprostor  $\mathbb{Z}_5^4$ . Určete dimenzi  $V$ , nalezněte bázi  $V$  a doplňte ji na bázi celého  $\mathbb{Z}_5^4$ .

$$V = \{(x_1, \dots, x_4)^T \in \mathbb{Z}_5^4 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\}$$

---

VIII) Jedna z možností jak zadat kružnici je  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$ . Nalezněte takovou rovnici kružnice, která prochází body  $(1, 0), (0, 2), (2, 0)$ .

---

Pozorně si přečtete zadání. Zdůvodňujete svá tvrzení. Kdo má hotovo, odevzdává a jde domů. Odevzdané papíry podepište a přidejte email. Výsledky budou emailem. A hlavně - **PODEPIŠTE** papíry a napište **VARIANTU**.

I) Pomocí Gaussovy eliminační metody spočtete všechna řešení soustavy rovnic. Řešte nad  $\mathbb{Z}_5$ .

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2$$

II) Nechť  $V$  je vektorový prostor a  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá a své odpovědi zdůvodněte.

- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $X$  nezávislá, je  $Y$  nezávislá.
- Je-li  $Y$  nezávislá, je  $X$  nezávislá.
- Je-li  $X$  závislá, je  $Y$  závislá.
- Je-li  $Y$  závislá, je  $X$  závislá.

III) Nechť  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zdali jsou následující množiny vektorů lineárně závislé či nezávislé.

- $X_1 = \{u, u + v, u + w\}$
- $X_2 = \{u + v, u - v, w\}$
- $X_3 = \{u + v, u - v, u + w, u - w\}$
- $X_4 = \{u + v, u + w, v + w\}$
- $X_5 = \{u - v, u - w, v - w\}$
- $X_6 = \{u - 2v + w, 3u + v - 2w, 7u + 14v - 13w\}$
- $X_7 = \{u, 2u, w\}$
- $X_8 = \{u, v + w\}$

IV) Určete k permutacím  $p$  a  $q$  následující:

- grafy (obrázky se šipkami)
- rozklady na cykly (cyklický zápis)
- rozklady na transpozice (nesplést pořadí)
- počty inverzí
- znaménka
- inverzní permutace

Dále určete složení permutací  $q \circ p$  a  $p \circ q$ . Při skládání se první aplikuje ta vpravo. Označte zřetelně označte co je co. Nenechte opravujícího na pochybách.

$$p = (4, 1, 2, 7, 5, 6, 3, 8), q = (4, 7, 5, 2, 3, 1, 8, 6)$$

---

V) Mějme vektorový podprostor  $V \subseteq \mathbb{Z}_5^4$  s bazí  $B$ . U vektorů  $u_1, u_2$  a  $u_3$  určete jejich souřadnice vzhledem k  $B$ , pokud náleží do  $B$ .

$$B = ((2, 2, 0, 2)^T, (3, 4, 4, 3)^T, (0, 4, 4, 0)^T)$$

$$u_1 = (1, 2, 1, 1)^T, u_2 = (3, 1, 3, 2)^T, u_3 = (1, 0, 3, 3)^T$$

---

VI) Nechť  $U$  je vektorový podprostor  $\mathbb{Z}_5^4$ . Určete dimenzi  $U$ , nalezněte bázi  $U$  a vyjádřete vektor  $u$  vzhledem k nalezené bázi.

$$U = \mathcal{L}((3, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 2, 4)^T, (0, 1, 0, 0)^T)$$

$$u = (2, 4, 4, 3)$$

---

VII) Nechť  $V$  je vektorový podprostor  $\mathbb{Z}_5^4$ . Určete dimenzi  $V$ , nalezněte bázi  $V$  a doplňte ji na bázi celého  $\mathbb{Z}_5^4$ .

$$V = \{(x_1, \dots, x_4)^T \in \mathbb{Z}_5^4 : 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + x_4 = 0\}$$

---

VIII) Jedna z možností jak zadat elipsu se středem v počátku je  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ . Nalezněte takovou rovnici elipsy se středem v počátku, která prochází body  $(3, 2), (0, 4)$ .

---