Lineární algebra II - 27.2. CV 2

I) V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ prostoru s bazí $B = \{\mathbf{x}^T = (1,1,1,1), \mathbf{y}^T = (4,1,4,1), \mathbf{z}^T = (1,2,3,4)\}$.

alternativně $B = \{(0,3,4,0)^T, (0,0,5,0)^T, (2,1,0,2)^T\}$
, $B = \{(2,4,2,1)^T, (-1,-2,-2,-1)^T, (1,2,4,2)^T, (1,2,3,4)^T\}$

II) Rozšiřte ortonormální bázi Z z předchozího příkladu na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

III) Pro prostor z příkladu I) určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2,2,1,5)^T$ a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

IV) Určete vzdálenost bodu $A = (5,5,3,3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8,-1,1,-2)^T$ a $C = (4,-2,2,-1)^T$.

V) Najděte bazi ortogonálního doplňku prostoru W s bazí $B = \{(1+i, 2, 0, -1)^T, (i, 1, -i, 2)^T\}$. Řešte v $\mathbb{C}^4$.

VI) Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p, q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jeko zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

a) $p = (6,4,1,5,3,2), q = (6,4,3,2,5,1)$
b) $p = (1,2,7,6,5,4,3,8,9), q = (1,3,5,7,9,8,4,2,6)$
c) $p = (5,4,3,2,1,9,8,7,6), q = (8,6,4,2,1,3,5,7,9)$

VII) Proč má inverzní permutace p^{-1} stejné cykly, počet inverzí i transpozic a tím pádem i znaménko jako původní permutace p?

VIII) Pro permutaci $p = (8,6,5,4,3,2,1,7)$ určete permutaci p^{387}.
alternativně i pro permutace z příkladu VI).

IX) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete $sgn(n, n-1, n-2, n-3, ..., 3, 2, 1)$.