Kombinatorika a grafy III - 7.10. CV 1

Minory a stromová šířka

Příklad 1:

Dokažte, že graf je vnějškově rovinný pravě tehdy když neobsahuje podrozdělení K_4 a $K_{2,3}$ jako podgraf. Dodejme, že graf je vnějškově rovinný, pokud existuje jeho nakreslení do roviny takové, že všechny vrcholy jsou incidentní s vnější stěnou.

Nápověda:

Přidej apexový vrchol (vrchol spojený se všemi ostatními).

Řešení:

Mějme graf G, který neobsahuje K_4 a $K_{2,3}$. Vytvoříme z něj graf G' přidáním jednoho nového vrcholu v spojeného hranou se všemi ostatními. Graf G' neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$. Tudíž je rovinný a můžeme ho nakreslit tak, aby v byl incidentní s vnější stěnou. Pak stačí v odebrat a získáme nakreslení vnějškové rovinné nakreslení G, protože každý vrchol bude incidentní s vnější stěnou.
Ještě ukážeme druhou implikaci. Mějme vnějškově rovinný graf G. Chceme ukázat, že neobsahuje podrozdělení K_4 ani $K_{2,3}$. Sporem nechť obsahuje. Vezměme vnějškové rovinné nakreslení G a do vnější stěny přidejme vrchol v spojený se všemi vrcholy grafu G. Výsledný graf bude rovinný. Navíc ale bude obsahovat podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$ a to je spor s Kuratowského větou, že rovinné grafy neobsahují podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.

Příklad 2:

Dokažte, že každý graf s minimálním stupněm tři obsahuje K_4 jako minor.

Nápověda:

Recyklace věty o maximálním grafu bez K_4 minoru. Ta věta, že vzniká lepením trojúhelníků....

Řešení:

tak poslední přilepený trojúhelník ma vrchol stupně 2 a tudíž to nemůže

---

Příklad 3:

Určete stromovou šířku mřížky $m \times n$.

Nápověda:

Horní odhad se udělá pomocí toho, že člověk ukáže bambule. Vyjde $\min\{m, n\}$. *Dolní odhad je prý také triviální.*

Řešení:

Příklad 4:

Nechť G je rovinný graf, v jeho libovolný vrchol a d libovolné přirozené číslo. Pak podgraf G indukovaný vrcholy do vzdálenosti d od v má stromovou šířku nejvýše $2d+1$.

Nápověda:

Tohle je zákeřný příklad.

Řešení:

Příklad 5:

Ukažte (bez použití Courcellovy věty), že barevnost grafů omezené stromové šířky lze rozhodovat v lineárním čase. Tedy graf pevné stromové šířky t je na vstupu a ptáme se, zda jeho barevnost je nejvýše k, kde k je nějaká konstanta.

Nápověda:

Dynamické programování. V jedne bambuli je možno si pamatovat všechna možná obarvení. $k^(t+1)$ *je konstanta.*

Řešení:
