Základy kombinatoriky a teorie grafů
Zadání domácích úkolů

10. května 2016

1 Zadáno 9. 3. 2016

Příklad 1. *Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$. Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$.* **[3]**

Příklad 2. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[3]**

Příklad 3. *Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2}\deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.* **[2]**

2 Zadáno 5. 4. 2016

Příklad 4. *Souvislost v orientovaných grafech.*

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$. **[2]**

(b) Ukažte, že každý turnaj *(orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.* **[3]**

Příklad 5. *Ukažte, že každá kostra souvislého grafu G obsahuje všechny mosty.* Mostem *v G rozumíme hranu, po jejímž odebrání G přestane být souvislý.* **[2]**

Příklad 6. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Najděte rovinné nakreslení grafu jeho doplňku na co nejvíce vrcholech.* **[3]**

Příklad 7. *Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení hran:*

(a) K_8, **[2]**

(b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**

Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $e \leq v + f$.

Příklad 8. *Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) graf $K_{3,6}$ bez křížení hran.* **[2]**

3 Zadáno 20. 4. 2016

Příklad 9. *Nechť G je souvislý rovinný graf s v vrcholy, který splňuje následující podmínky:*

- *$v = 8k$ pro nějaké přirozené číslo k,*
- *$\frac{5v}{8}$ vrcholů má stupeň tři, $\frac{v}{4}$ vrcholů má stupeň čtyři a $\frac{v}{8}$ vrcholů má stupeň pět,*
- *všechny stěny v rovinném nakreslení G jsou buď trojúhelníky nebo čtyřúhelníky.*

Nakreslete rovinné nakreslení aspoň jednoho takového grafu. Kolik vrcholů, hran, trojúhelníkových a čtyřúhelníkových stěn takový graf může mít? **[3]**

Příklad 10. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i, $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i. Ukažte, že platí* **[2]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 11. *Jako obvod grafu značíme délku jeho nejkratšího cyklu (nemá-li graf cyklus, definujeme jeho obvod jako nekonečno). Ukažte, že pro počet hran m rovinného grafu o obvodu $g \in \mathbb{N}$ platí $m \leq \frac{g}{(g-2)}(n-2)$, kde n značí počet vrcholů.* **[2]**

4 Zadáno 10. 5. 2016

Příklad 12. *Určete koeficient u členu* x^{28} *ve výrazu* $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$. *Vyjádřete jej ve tvaru* $\binom{p}{q}$ *pro nějaká přirozená čísla* p *a* q. **[3]**

Příklad 13. *Graf* G *má 360 vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň 3 nebo 4. Každý vrchol stupně 3 sousedí se dvěma vrcholy stupně 4 a jedním vrcholem stupně 3. Každý vrchol stupně 4 sousedí s jedním vrcholem stupně 3 a třemi vrcholy stupně 4. Určete počet hran grafu* G. **[2]**

Příklad 14. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní* n*-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 15. *Rozklad čísla* $n \in \mathbb{N}$ *je zápis* n *jako součtu přirozených čísel. Jaký je počet rozkladů* n*, pokud rozlišujeme pořadí sčítanců?* **[3]**