Základy kombinatoriky a teorie grafů — 4. cvičení*

15. března 2016

1 Aplikace Hallovy věty

Nechť X a I jsou množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. (V množinovém systému podle této definice se tatáž množina může opakovat.) *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Budeme předpokládat, že platí $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i konečné.

Věta (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{i \in J} M_i\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.*

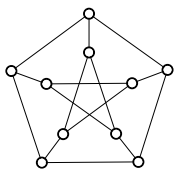
Příklad 1. *Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.*

(a) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?

(b) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 2. Párování v grafu G *je množina hran $F \subseteq E(G)$ taková, že, každý vrchol grafu G patří do nejvýše jedné hrany z F.* Perfektní párování grafu G *je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu G.*

(a) Najděte šest různých perfektních párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.



(b) Dokažte, že je-li bipartitiní graf s neprázdnou množinou hran k-regulární, pak má perfektní párování.

Příklad 3. Latinský obdélník řádu $k \times n$, *$k \leq n$ je matice $L \in \{1, \ldots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.* Latinský čtverec řádu n *je latinský obdélník řádu $n \times n$.*

(a) Ukažte, že každý latinský obdélník lze přidáváním řádků doplnit na latinský čtverec.

(b) Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\frac{(n!)^2}{e}$.

Příklad 4. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

Příklad 5. *Dilworthova věta říká, že má-li v částečně uspořádané množině $(P, \prec)$ nejdelší antiřetězec délku r, pak lze P rozložit na r řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu.*

Příklad 6 (*)**.** *Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme* permanent matice A *jako*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

(a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\operatorname{per}(A)$, *kde $A = (a_{ij})$.*

(b) Nechť $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojitě stochastická matice*). Ukažte, že* $\operatorname{per}(A) > 0$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/