Základy kombinatoriky a teorie grafů — 10. cvičení*

25. dubna 2016

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. *(a) Mějme polynomy* $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ *a* $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. *Jaký je koeficient u členu* x^7 *v jejich součinu* $p(x)q(x)$*?*

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Příklad 2. *V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků—větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole?*

Binomická věta. *Pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení. *Buď* $(a_0, a_1, \ldots)$ *posloupnost reálných čísel. Nechť existuje* K *takové, že* $|a_n| \leq K^n$ *pro všechna* n. *Potom pro každé* $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ *řada* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci* $a(x)$ *proměnné* x *na uvedeném intervalu. Hodnotami* $a(x)$ *na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy* $a_0, a_1, \ldots$ *jednoznačně určeny,* $a(x)$ *má v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 3. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$, *tedy* n*-tý člen je součtem prvních* n *sudých přirozených čísel včetně nuly.*

Příklad 4. *Určete koeficient*

(a) u x^{10} *v* $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) u x^{2016} *v* $\sin(x)$.

Příklad 5 (Řešení rekurencí)**.** *Zjistěte, čemu se rovná* a_n, *které je zadané rekurentní rovnicí* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ *a* $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ *pro* $n \geq 0$.

Příklad 6. *Rozklad čísla* $n \in \mathbb{N}$ *je zápis* n *jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).*

(a) Nechť a_n *značí počet rozkladů čísla* n. *Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost* $(a_1, a_2, \ldots)$*?*

(b) Ukažte, že počet rozkladů n *na liché části se rovná počtu rozkladů* n *na vzájemně různé části.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_k x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1} \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$