Základy kombinatoriky a teorie grafů
Zadání domácích úkolů

14. května 2015

1 Zadáno 2. 3. 2015

Příklad 1. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n uvažujme síť se zdrojem $z = (0,0,\dots,0)$ a stokem $s = (1,1,\dots,1)$, kde všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Sestrojte*

(a) celočíselný maximální tok. **[1]**

(b) maximální tok, který je na všech hranách kladný. **[1]**

Příklad 2. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[3]**

Příklad 3. *Dokažte, že hrany každého grafu lze zorientovat tak, že vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu se liší nejvýše o jedna.* **[2]**

Příklad 4. *Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2}\deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.* **[2]**

2 Zadáno 23. 3. 2015

Příklad 5. *Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu leží každý vrchol na nějaké kružnici.* **[1]**

Příklad 6. *Souvislost v orientovaných grafech.*

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$. **[2]**

(b) Ukažte, že každý turnaj *(orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.* **[3]**

Příklad 7. *Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven.*
Hint: použijte fakt, že rovinný graf $G = (V,E)$ bez trojúhelníků má nanejvýš $2|V| - 4$ hran. **[3]**

Příklad 8. *Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme* permanent *matice A jako*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

(a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1,\dots,u_n\}$ a $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\mathrm{per}(A)$, kde $A = (a_{ij})$. **[2]**

(b) Nechť $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojitě stochastická matice*). Ukažte, že $\mathrm{per}(A) > 0$.* **[4]**

3 Zadáno 13. 4. 2015

Příklad 9. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Najděte rovinné nakreslení grafu jeho doplňku na co nejvíce vrcholech.* **[3]**

Příklad 10. *Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení hran:*

(a) K_8, **[2]**

(b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**

Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $e \leq v + f$.

Příklad 11. *Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) graf $K_{3,6}$ bez křížení hran.* **[2]**

Příklad 12. *Mějme nekonečný graf G s množinou vrcholů $V = \mathbb{R}^2$, kde dva vrcholy spojíme hranou právě tehdy, když jsou od sebe ve vzdálenosti přesně jedna. Ukažte, že $4 \leq \chi(G) \leq 7$.* **[2+2]**

4 Zadáno 22. 4. 2015

Příklad 13. *Nechť G je souvislý rovinný graf s v vrcholy, který splňuje následující podmínky:*

- *$v = 8k$ pro nějaké přirozené číslo k,*
- *$\frac{5v}{8}$ vrcholů má stupeň tři, $\frac{v}{4}$ vrcholů má stupeň čtyři a $\frac{v}{8}$ vrcholů má stupeň pět,*
- *všechny stěny v rovinném nakreslení G jsou buď trojúhelníky nebo čtyřúhelníky.*

Nakreslete rovinné nakreslení aspoň jednoho takového grafu. Kolik vrcholů, hran, trojúhelníkových a čtyřúhelníkových stěn takový graf může mít? **[3]**

Příklad 14. *Ukažte, že v každé triangulaci G (tj. v grafu, který má rovinné nakreslení, v němž je každá stěna trojúhelník) existuje hrana $\{u, w\}$, pro kterou platí $\deg_G(u) + \deg_G(w) \leq 22$.* **[4]**

Příklad 15. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i, $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i. Ukažte, že platí* **[2]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 16. *Jako obvod grafu značíme délku jeho nejkratšího cyklu (nemá-li graf cyklus, definujeme jeho obvod jako nekonečno). Ukažte, že pro počet hran m rovinného grafu o obvodu $g \in \mathbb{N}$ platí $m \leq \frac{g}{(g-2)}(n-2)$, kde n značí počet vrcholů.* **[2]**

5 Zadáno 5. 5. 2015

Příklad 17. *Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.* **[3]**

Příklad 18. *Určete koeficient u členu x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q.* **[3]**

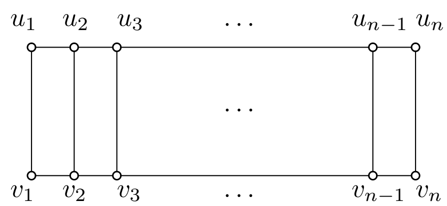
Příklad 19. *Graf G má 360 vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň 3 nebo 4. Každý vrchol stupně 3 sousedí se dvěma vrcholy stupně 4 a jedním vrcholem stupně 3. Každý vrchol stupně 4 sousedí s jedním vrcholem stupně 3 a třemi vrcholy stupně 4. Určete počet hran grafu G.* **[2]**

Příklad 20. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 21. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel. Jaký je počet rozkladů n, pokud rozlišujeme pořadí sčítanců?* **[3]**

6 Zadáno 14. 5. 2014

Příklad 22. *Určete počet perfektních párování v žebříku Z_n:* **[2]**



Příklad 23. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 24. *Nechť e_n značí počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které mají pouze cykly sudé délky. Podobně o_n označuje počet permutací, jejichž cykly mají pouze liché délky. Ukažte, že platí $e_{2n} = o_{2n}$.* **[6]**

Příklad 25. *Ukažte, že až na isomorfismus je Fanova rovina jediná konečná projektivní rovina řádu dva.* **[3]**

Příklad 26. *Ukažte, že každý graf s N vrcholy, který neobdsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf, má nanejvýš $\frac{1}{2}(N^{3/2} + N)$ hran.* **[4]**