Základy kombinatoriky a teorie grafů – 9. cvičení*

13. dubna 2015

1 Ramseyova teorie

Jako *hypergraf* označme dvojici $\mathcal{H} = (V, E)$, kde $E \subseteq 2^V$. Řekneme, že $\mathcal{H}$ je *m-uniformní*, pokud $E \subseteq \binom{V}{m}$. Tedy grafy odpovídají 2-uniformním hypergrafům. Úplný m-uniformní hypergraf na n vrcholech označíme K_n^m.

Věta. *Nechť $m, a_1, a_2, \dots, a_l$ jsou libovolná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo $n = R_l^m(a_1, a_2, \dots, a_l)$ takové, že každé obarvení hran hypergrafu K_n^m l barvami obsahuje $K_{a_i}^m$ barvy i pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, l\}$.*

Čísla $R_l^m(a_1, a_2, \dots, a_l)$ ze znění věty se nazývají *Ramseyova čísla* a v případě grafů (tj. $m = 2$) se značí pouze $R_l(a_1, a_2, \dots, a_l)$.

Příklad 1. *Erdősovo-Szekeresovo lemma o podposloupnostech.*

(a) Nalezněte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.

(b) Ukažte, že v každé posloupnosti $(m-1)(n-1)+1$ různých přirozených čísel existuje buď rostoucí podposloupnost délky m nebo klesající podposloupnost délky n.

Příklad 2. *Happy Ending Problem.*

(a) Ukažte, že v každé množině pěti bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze (tj. žádné tři body neleží na společné přímce) lze nalézt konvexní čtyřúhelník.

(b) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje přirozené $N = N(k)$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje k bodů v konvexní poloze.

Příklad 3 (Schurova věta)**.** *Ukažte, že existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ dvěma barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y = z$ (tj. najdeme jednobarevné řešení rovnice).*

Hint: Zvolte $N = R_2(3,3) - 1$ a sestrojte vhodný hranově 2-obarvený graf, zbytek plyne z Ramseyovy věty pro grafy.

Příklad 4. *Aritmetické posloupnosti v permutacích.*

(a) Nechť $M(n)$ označuje počet permutací množiny $[n]$, které neobsahují aritmetickou posloupnost délky tři (3AP). Ukažte, že pro každé přirozené n platí $M(n) > 0$. Neboli dokažte, že pro každé n jde najít permutaci $[n]$, která neobsahuje 3AP.

(b) Ukažte, že dokonce platí $M(n) \geq 2^{n-1}$ pro každé n. Neboli permutací, které se vyhýbají 3AP je dokonce exponenciálně mnoho.

(c) Ukažte, že v každé permutaci všech přirozených čísel už vždy najdeme 3AP.

Příklad 5. *Dokažte nerovnost $R_k(3, \dots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$.*

Příklad 6 (*)**.** *Vzpomeňte si na důkaz Ramseyovy věty pro grafy a zkuste s její pomocí dokázat Ramseyovu větu pro hypergrafy.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/