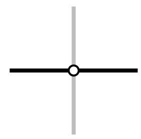
Základy kombinatoriky a teorie grafů – 7. cvičení*

30. března 2015

1 Rovinné grafy podruhé

Příklad 1. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 2 (*)**.** *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.*



Obrázek 1: Separující se jednobarevné páry hran.

2 Barevnost a vybíravost

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu G=(V,E)*, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. *Barevnost grafu G*, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G.

Máme-li ke každému vrcholu v grafu G přiřazený povolený seznam barev $L(v)$, pak řekneme, že G je *L-obarvitelný*, pokud jej lze obarvit pouze povolenými barvami ze seznamů L. Graf je *k-vybíratelný*, pokud je L-obarvitelný pro libovolné přiřazení seznamů L takové, že každý seznam obsahuje alespoň k barev. *Vybíravost grafu G*, což je nejmenší k, pro který je G k-vybíratelný, značíme $\chi_l(G)$.

Příklad 3. *Dokažte, že vybíravost sudých cyklů je dva.*

Příklad 4. *Nalezněte grafy (a jejich seznamy povolených barev) s omezenou barevností, ale libovolně velkou vybíravostí.*

Příklad 5 (*)**.** *Nalezněte rovinný graf (se seznamy povolených barev), který není 4-vybíratelný.*

Příklad 6. *Mějme nekonečný graf G s množinou vrcholů $V = \mathbb{R}^2$, kde dva vrcholy spojíme hranou právě tehdy, když jsou od sebe ve vzdálenosti přesně jedna. Ukažte, že $4 \leq \chi(G) \leq 7$.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/