Základy kombinatoriky a teorie grafů – 6. cvičení*

23. března 2015

1 Rovinné grafy a jejich vlastnosti

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G.

Eulerova formule. *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý rovinný graf. Označme* $v = |V|$, $e = |E|$ *a jako* f *počet stěn jeho nakreslení. Potom platí* $v + f - e = 2$.

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf* G *splňuje* $\chi(G) \leq 4$.

Kuratowského věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení* K_5 *ani* $K_{3,3}$.

Příklad 1. *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý rovinný graf. Označme* $v = |V|$, $e = |E|$ *a jako* f *počet stěn jeho nakreslení.*

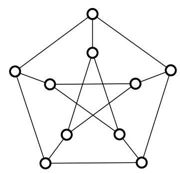
(a) *Ukažte, že rovinné grafy, které jsou maximální co do počtu hran, jsou* triangulacemi*, neboli grafy, které mají rovinné nakreslení, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Můžete bez důkazu využít fakt, že v každém rovinném nakreslení vrcholově 2-souvislého grafu je hranicí každé stěny kružnice.*

(b) *Ukažte, že pro každý rovinný graf s* $v \geq 3$ *platí* $e \leq 3v - 6$.

(c) *Pro jaké největší* $d \in \mathbb{N}$ *dokážete najít* d*-regulární rovinný graf? Jak velké* d *má ještě smysl uvažovat?*

Příklad 2. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů* K_5, K_6 *a* K_7 *na toru.*

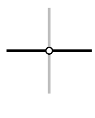
Příklad 3. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 4. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 5. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu* G*, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy* G *jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 6 (*). *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.*



Obrázek 1: Separující se jednobarevné páry hran.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/