Základy kombinatoriky a teorie grafů – 5. cvičení*

16. března 2015

1 Grafová souvislost

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ *grafu* $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G. *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ *grafu* $G = (V, E)$ definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf, a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Graf je *hranově k-souvislý*, pokud platí $k_e(G) \geq k$ a *vrcholově k-souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nanejvýš o jedna.

Příklad 1. *Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že*

(a) hranová souvislost klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.

(b) vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 2. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 3. *Graf je k-*regulární*, má-li všechny stupně rovné k.*

(a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý.

(b) Je pro $k \geq 2$ každý k-regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

(c) Co když v příkladu nahradíme vrcholovou souvislost hranovou?

Příklad 4. *Buď G kriticky 2-souvislý graf, to znamená, že je vrcholově 2-souvislý, ale žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý.*

(a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.

(b) Pro každé n uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n.

Příklad 5. *Orientovaný graf G je* silně souvislý*, pokud pro každé jeho dva vrcholy u a v existují orientované cesty z u do v a z v do u.*

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$.

(b) Ukažte, že každý turnaj *(orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.*

Příklad 6. *(a) Ukažte bez použití Mengerovy věty, že ve vrcholově 2-souvislém grafu leží každé dva vrcholy na společném cyklu.*

Hint: Zkuste postupovat indukcí podle délky nejkratší cesty mezi dvěma vybranými vrcholy.

(b) (*) Pro libovolné $k \geq 2$ ukažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu leží každých k vrcholů na společném cyklu.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/