Základy kombinatoriky a teorie grafů – 4. cvičení*

9. března 2015

1 Aplikace Hallovy věty

Nechť X a I jsou množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i \mid i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. (V množinovém systému podle této definice se tatáž množina může opakovat.) *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Budeme předpokládat, že platí $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i konečné.

Věta (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v* $\mathcal{M}$ *existuje právě tehdy, když pro každou* $J \subseteq I$ *je* $\left|\bigcup_{i\in J} M_i\right| \geq |J|$; *tato podmínka se nazývá Hallova.*

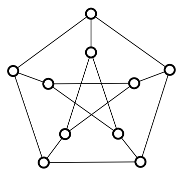
Příklad 1. *Nechť* a, b, c, d, e *jsou různá přirozená čísla.*

(a) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d\}$ *systém různých reprezentantů?*

(b) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d, e\}$ *systém různých reprezentantů?*

Příklad 2. *Párování v grafu* G *je množina hran* $F \subseteq E(G)$ *taková, že, každý vrchol grafu* G *patří do nejvýše jedné hrany z* F. *Perfektní párování grafu* G *je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu* G.

(a) Najděte šest různých perfektních párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.



(b) Dokažte, že je-li bipartitiní graf s neprázdnou množinou hran k*-regulární, pak má perfektní párování.*

Příklad 3. *Latinský obdélník řádu* $k \times n$, $k \leq n$ *je matice* $L \in \{1, \ldots, n\}^{k\times n}$, *kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Latinský čtverec řádu* n *je latinský obdélník řádu* $n \times n$.

(a) Ukažte, že každý latinský obdélník lze přidáváním řádků doplnit na latinský čtverec.

(b) Ukažte, že latinských čtverců řádu n *je alespoň* $\frac{(n!)^2}{e}$.

Příklad 4. *Najděte nekonečný systém množin* $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, *který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *obsahuje sjednocení libovolné* k*-tice množin z* $\mathcal{M}$ *aspoň* k *prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

Příklad 5. *Dilworthova věta říká, že má-li v částečně uspořádané množině* $(P, \prec)$ *nejdelší antiřetězec délku* r, *pak lze* P *rozložit na* r *řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu.*

Příklad 6 (*)**.** *Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven.* Rovinný graf *je takový graf, který jde nakreslit do roviny bez křížení hran. Hint: použijte fakt, že rovinný graf* $G = (V, E)$ *bez trojúhelníků má nanejvýš* $2|V| - 4$ *hran.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/