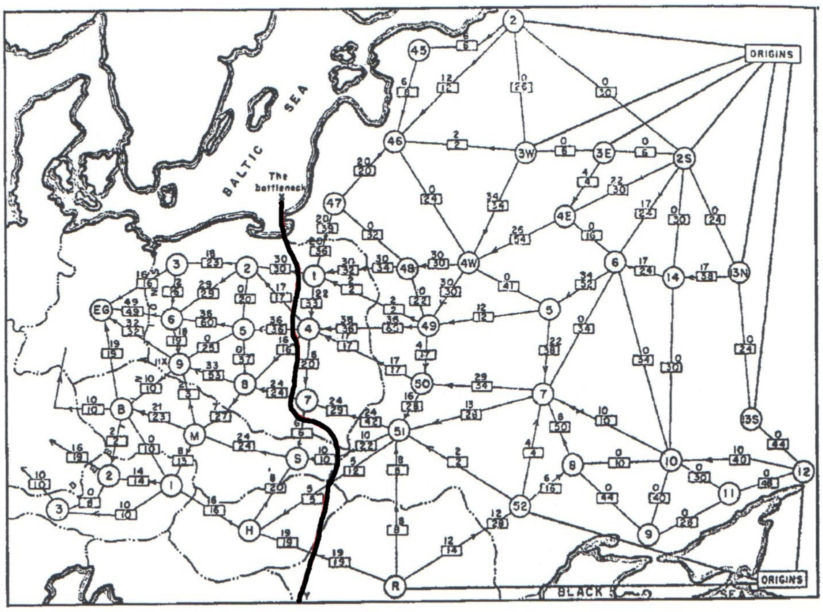
Základy kombinatoriky a teorie grafů – 3. cvičení*

2. března 2015

1 Toky v sítích



Železniční síť střední a východní Evropy sestavená v 50. letech armádou USA podle zpráv C.I.A. Každá hrana má vyznačený směr, kterým jezdí vlaky, a nosnost. Minimální řez sítí (s hodnotou 163 000 tun) je vyznačený. Ford s Fulkersonem tuto zprávu uvádějí jako motivaci svého výzkumu.

Síť G je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u,y)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je $|f| = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z)$. Cesta (ne nutně orientovaná) je *nasycená*, pokud pro nějakou její hranu e orientovanou po směru cesty je $f(e) = c(e)$ nebo pro nějakou její hranu e orientovanou proti směru cesty je $f(e) = 0$. *Zlepšující cesta* je cesta, která není nasycená. Pokud jako *rezervu hrany* označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru cesty a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru cesty, pak je cesta nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. *Řezem* nazveme podmnožinu E, po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $\sum_{e\in R} c(e)$.

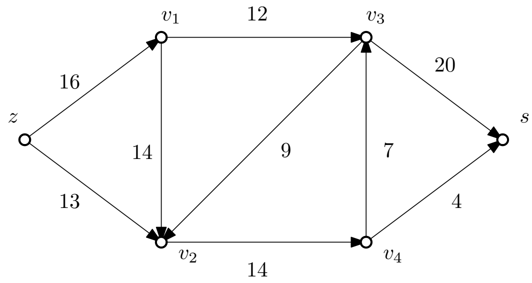
Algoritmus 1.1: FordFulkerson(G)

$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do {
  Buď P nějaká taková cesta.
  $\epsilon \leftarrow \min_{e\in P} r(e)$
  Zvětšíme tok f podél P o ϵ (každé hraně $e \in P$ zvětšíme $f(e)$, případně zmenšíme $f(e')$, podle toho, co jde).

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Najděte Ford-Fulkersonovým algoritmem maximální tok v následující síti. Nalezněte také řez minimální kapacity.*



Příklad 2. *(a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.*

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 3. *Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?*

Příklad 4. *Jakých hodnot může nabývat počet maximálních toků v síti?*

Příklad 5. *(Königova věta)* Vrcholové pokrytí *grafu G je podmnožina vrcholů U taková, že každá hrana G je incidentní aspoň s jedním vrcholem z U. Ukažte, že v každém bipartitním grafu je velikost maximálního párování rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí.*