Základy kombinatoriky a teorie grafů – 2. cvičení*

23. února 2015

1 Opakování z teorie grafů podruhé

V grafu $G = (V, E)$ nazýváme posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, $v_i \in V$ a $e_j \in E$, *sledem v G délky k*. Jako *matici sousednosti* grafu G označujeme matici A, ve které je pozice (u, v) rovna jedné, pokud $\{u, v\} \in E$, a nule jinak.

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu G=(V,E)*, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu G*, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G. Velikost největší *nezávislé množiny* grafu G, neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme $\alpha(G)$.

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají spojité křivky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto křivek se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu G*. Dá se ukázat, že rovinné grafy, které jsou maximální co do počtu hran, odpovídají *triangulacím*, což jsou rovinné grafy, v nichž je každá stěna trojúhelník.

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf jde obarvit čtyřmi barvami.*

Příklad 1. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.*

Příklad 2. *V orientovaném grafu hranám odpovídají uspořádané dvojice vrcholů (šipky mezi vrcholy), přičemž každý pár vrcholů tvoří nanejvýš jednu takovou dvojici. Ukažte, že každý orientovaný úplný graf obsahuje orientovanou Hamiltonovskou cestu (cestu obsahující všechny vrcholy tvořenou na sebe navazujícími šipkami stejného směru).*

Příklad 3. *Pro každý graf s n vrcholy a m hranami zkuste ukázat následující odhady barevnosti:*

(a) $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

(b) $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

(c) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

Příklad 4. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0, 1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 5. *Máme-li pořadí vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ grafu G a množinu barev $\{1, 2, \ldots, k\}$, tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.*

(a) Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije $\chi(G)$ barev.

(b) Ukažte, že existuje strom T a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje $\Omega(\log n)$ barev.

Příklad 6. *Buď G graf s vrcholy $\{1, \ldots, n\}$ a nechť A je jeho matice sousednosti. Označme jako $a_{i,j}^{(k)}$ prvek na pozici (i, j) v k-té mocnině A^k matice A.*

(a) Dokažte, že $a_{i,j}^{(k)}$ se rovná počtu sledů délky k mezi vrcholy i a j grafu G.

(b) Dokažte, že G obsahuje K_3 právě tehdy, když existuje pár indexů (i, j) takový, že platí $a_{i,j}^{(1)} \neq 0$ a $a_{i,j}^{(2)} \neq 0$.

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 7. *Nalezněte příklad triangulace, na které se rozbije následující nesprávný důkaz Věty o čtyřech barvách:*

Důkaz. Stačí uvažovat jen maximální rovinné grafy, čili triangulace, protože přidáním hrany neklesne barevnost. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Pro $n = 3$ je tvrzení triviální, protože $\chi(K_3) = 3$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny triangulace na n vrcholech. Přidáním vrcholu v do stěny F n-vrcholové triangulace T' a spojením v hranami se všemi vrcholy stěny F obdržíme triangulaci T na $n + 1$ vrcholech. Uvažme obarvení T' nanejvýš čtyřmi barvami, které máme z indukčního předpokladu. Protože v sousedí se třemi vrcholy, můžeme v obarvit za použití nanejvýš čtyř barev. Tím obdržíme obarvení s nanejvýš čtyřmi barvami pro T a tvrzení tak platí i pro triangulace s $n + 1$ vrcholy. $\square$