

Základy kombinatoriky a teorie grafů – 1. cvičení*

16. února 2015

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například úplný graf na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$, cyklus $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$, cesta $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \dots, n-1\})$ či úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\} \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$.

Graf H je podgrafem grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Stupeň vrcholu v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v , značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je souvislý, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v . Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f: V \rightarrow V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako doplněk grafu G značíme graf \overline{G} , který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá. Kostra grafu $G = (V, E)$ je maximální souvislý graf bez kružnice (tj. strom) tvaru (V, E') , kde $E' \subseteq E$.

Princip sudosti. Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

1 Opakování z teorie grafů

Příklad 1. Je následující důkaz tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3 .“ správný?

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n . Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3 . Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n - 1$ vrcholech, pro který tvrzení platí. Vytvoříme z něj nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G . Protože G obsahoval cyklus C_3 , tak jej G' obsahuje také. \square

Příklad 2. Ukažte, že každý souvislý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy u, v , takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.

Příklad 3. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplněkem nesouvislý?

Příklad 4. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy takový, že všechny jeho vrcholy mají navzájem různé stupně?

Příklad 5. Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů (tj. vrcholů stupně 1)?

Příklad 6. Odvodte minimální a maximální počet hran v grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

Příklad 7. Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2} \deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.

Příklad 8. Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu K_n .

(b) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$.

Příklad 9. Spočítejte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>