

Základy kombinatoriky a teorie grafů – 14. cvičení*

18. května 2015

1 NP-úplnost a polynomiální převoditelnost

Rozhodovací problém P lze chápat takto: pro daný vstup $x \in L(P)$, kde $L(P)$ je jazyk obsahující všechny instance problému P , chceme rozhodnout, zda $x \in L(P)_Y$ či $x \in L(P)_N$, kde $L(P)_Y =$ kódy instancí s odpovědí ANO a $L(P)_N =$ kódy instancí s odpovědí NE.

Splnitelnost (SAT)

Vstup: Formule F v KNF s n Booleovskými proměnnými.

Otázka: Existuje pravdivostní ohodnocení proměnných formule F , které splňuje F ?

3-Splnitelnost (3SAT)

Vstup: Kubická formule F v KNF s n Booleovskými proměnnými.

Otázka: Existuje pravdivostní ohodnocení proměnných formule F , které splňuje F ?

3-Barvení grafu (3-BG)

Vstup: Neorientovaný graf G .

Otázka: Lze obarvit vrcholy G třemi barvami tak, aby žádná hrana neměla koncové vrcholy stejné barvy?

Klika (KL)

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo k .

Otázka: Obsahuje G úplný podgraf na k vrcholech?

Nezávislá podmnožina (NM)

Vstup: Neorientovaný graf G a přirozené číslo q .

Otázka: Obsahuje G nezávislou podmnožinu velikosti q ?

Hamiltonovská kružnice (HK)

Vstup: Neorientovaný graf G .

Otázka: Obsahuje G Hamiltonovskou kružnici?

Obchodní cestující (TSP)

Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$, váhy $w: E \rightarrow \mathbb{N}_0$ a číslo $k \in \mathbb{N}_0$.

Otázka: Existuje v G Hamiltonovská kružnice s celkovou váhou nejvýše k ?

Deterministický Turingův stroj (DTS) je abstraktní stroj definovaný pětici $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, který se skládá z konečné množiny stavů Q obsahující počáteční stav q_0 a množinu přijímacích stavů $F \subseteq Q$, konečné abecedy Σ a přechodové funkce $\delta: Q \times \Sigma^k \rightarrow Q \times \Sigma^{k-1} \times \{-1, 0, 1\}^k$ určující program stroje. Definice *nedeterministického Turingova stroje* (NTS) je stejná, jen přechodová funkce má předpis $\delta: Q \times \Sigma^k \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Sigma^{k-1} \times \{-1, 0, 1\}^k)$, kde \mathcal{P} značí potenční množinu. DTS, respektive NTS, je *transducer*, pokud k němu přidáme výstupní pásku, která je pouze pro zápis, čtecí hlava se po ní pohybuje jen vpravo a symbol pod ní neovlivňuje přechodovou funkci.

Jako NP označme třídu jazyků L , které mají polynomiální nedeterministickou časovou složitost, tj. existuje NTS, který nad každým vstupem $w \in \Sigma^*$ délky n udělá nejvýše polynomiálně mnoho kroků vzhledem k n , než se zastaví a přijímá právě jazyk L .

Funkce $f: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ je *polynomiálně vyčíslitelná* tehdy a jen tehdy, když existuje polynom p a DTS transducer A takový, že pro každý vstup $x \in \Sigma_1^*$ dává A výstup $f(x)$ po vykonání nanejvýš $p(|x|)$ kroků. Jazyk $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ je *polynomiálně převoditelný* na jazyk $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, značeno $L_1 \propto L_2$, tehdy a jen tehdy, když existuje polynomiálně vyčíslitelná funkce $f: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ taková, že $\forall x \in \Sigma_1^*: (x \in L_1) \equiv (f(x) \in L_2)$. Problém P je NP-těžký tehdy a jen tehdy, když $\forall Q \in \text{NP} : L(Q)_Y \propto L(P)_Y$. Je-li navíc $L(P)_Y \in \text{NP}$, pak říkáme, že P je NP-úplný. Všechny rozhodovací problémy zmíněné výše jsou NP-úplné.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Ukažte následující polynomiální převody.

(a) $KL \propto NM$,

(b) $HK \propto TSP$,

(c) $SAT \propto 3\text{-SAT}$,

(d) $SAT \propto KL$,

(e) $3\text{-SAT} \propto 3\text{-BG}$.