Základy kombinatoriky a teorie grafů – 13. cvičení*

11. května 2015

1 Konečné projektivní roviny

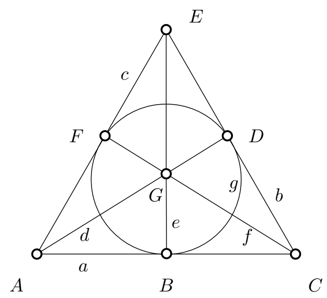
Nechť X je konečná množina a $\mathcal{L} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{L})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

(A0) $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \neq L_2 : |L_1 \cap L_2| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).

(A1) $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists! L \in \mathcal{L} : x_1, x_2 \in L$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

(A2) $\exists F \subseteq X, |F| = 4 \forall : |L \cap F| \leq 2$ (existují 4 body, z nichž žádné tři nejsou kolineární).

Řád projektivní roviny $(X, \mathcal{L})$ se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také každý bod leží na $n + 1$ přímkách. Příkladem konečné projektivní roviny (řádu 2) je *Fanova rovina*:



Příklad 1. *V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním za koupení jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla. Kolik lístků si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?*

Příklad 2. *Bez použití duality dokažte, že každá konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek.*

Příklad 3. *Pokuste se nakreslit konečnou projektivní rovinu řádu 3.*

Příklad 4. *(a) Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $cN^{3/2}$ hranami pro nějakou konstantu $c > 0$, který neobdsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.*

(b) Bonusový příklad (*): ukažte, že každý takový graf má nanejvýš $\frac{1}{2}(N^{3/2} + N)$ hran.

Příklad 5. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Řekneme, že množinový systém $\mathcal{M}$ je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky X dvěma barvami tak, aby každá množina z $\mathcal{M}$ obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.*

2 Latinské čtverce

Latinský čtverec řádu n je matice o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \ldots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \ldots, L_t\}$ Latinských čtverců je množinou *navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální.

Příklad 6. *Nalezněte maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu čtyři a dokažte, že je maximální.*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/