

Základy kombinatoriky a teorie grafů – 12. cvičení*

4. května 2015

1 Vytvořující funkce – aplikace

(Obyčejnou) vytvořující funkcí posloupnosti (a_0, a_1, a_2, \dots) je mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$. Exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti (a_0, a_1, a_2, \dots) je mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Například funkce e^x je exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$. Necht $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$
$x^k a(x)$	$(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k - 1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_k x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$
$\int_0^x a(t) dt$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$
$a(x)b(x)$	(c_0, c_1, c_2, \dots) , kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Příklad 1. Kolika způsoby můžeme naplnit košík n kousky ovoce (jablka, hrušky, banány a pomeranče) tak, aby počet jablek byl sudý, počet banánů byl násobek pěti a v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče a nanejvýš jedna hruška?

Příklad 2. V USA mají mince těchto typů: 1, 5, 10, 25, 50 centy a \$1. Nalezněte vytvořující funkci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je počet způsobů, kolika se dá americkými mincemi zaplatit n centů.

Příklad 3. Zjistěte, čemu se rovná a_n , které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Příklad 4 (*). Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n , stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?

Příklad 5 (*). Nalezněte vytvořující funkci, jejíž koeficienty udávají počet 2-regulárních neorientovaných grafů na množině vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$ (vrcholy grafu jsou označené).

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>