Základy kombinatoriky a teorie grafů – 11. cvičení*

27. dubna 2015

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. *(a) Mějme polynomy $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ a $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. Jaký je koeficient u členu x^7 v jejich součinu $p(x)q(x)$?*

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Příklad 2. *V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků – větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole?*

Věta (Binomická věta)**.** *Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako *(obyčejnou) vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots)$. Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení. *Buď $(a_0, a_1, \ldots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že $|a_n| \le K^n$ pro všechna n. Potom pro každé $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \ldots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí*

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 3. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$*, tedy n-tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.*

Příklad 4. *Určete koeficient*

(a) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) u x^{2015} v $\sin(x)$.

Příklad 5 (Řešení rekurencí)**.** *Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \ge 0$.*

Příklad 6. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).*

(a) Nechť a_n značí počet rozkladů čísla n. Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$?

(b) Ukažte, že počet rozkladů n na liché části se rovná počtu rozkladů n na vzájemně různé části.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/