Základy kombinatoriky a teorie grafů – 10. cvičení*

20. dubna 2015

1 Ramseyova teorie – pokračování

Ramseyova věta pro grafy. *Nechť $l, a_1, a_2, \ldots, a_l$ jsou libovolná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo $R_l(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ takové, že každé obarvení hran K_n pro $n \geq R_l(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ pomocí l barev obsahuje kopii K_{a_i} barvy i pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.*

Čísla $R_l(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ nazýváme *Ramseyova čísla úplných grafů*. Ramseyova čísla lze definovat i pro obecné grafy H a G. Jako $R_2(H, G)$ označíme nejmenší přirozené n takové, že každé červeno-modré obarvení hran K_n obsahuje buď červenou kopii H nebo modrou kopii G. Z Ramseyovy věty pro grafy pak vidíme, že platí $R_2(H, G) \leq R_2(|V(H)|, |V(G)|)$.

Příklad 1 (Schurova věta)**.** *Ukažte, že existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ dvěma barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y = z$ (tj. najdeme jednobarevné řešení rovnice). Platí varianta tvrzení i pro více barev?*

Hint: Zvolte $N = R_2(3, 3) - 1$ a sestrojte vhodný hranově 2-obarvený graf, zbytek plyne z Ramseyovy věty pro grafy.

Příklad 2. *Nechť $M(n)$ označuje počet permutací množiny $[n]$, které neobsahují aritmetickou posloupnost délky tři (3AP).*

(a) Ukažte, že pro každé přirozené n platí $M(n) > 0$. Neboli dokažte, že pro každé n jde najít permutaci $[n]$, která neobsahuje 3AP.

(b) Ukažte, že dokonce platí $M(n) \geq 2^{n-1}$ pro každé n. Neboli počet permutací, které se vyhýbají 3AP, dokonce roste exponenciálně rychle.

(c) Ukažte, že v každé permutaci všech přirozených čísel už vždy najdeme 3AP.

Příklad 3. *Ramseyovská čísla.*

(a) Dokažte nerovnost $R_k(3, \ldots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$.

Hint: postupujte indukcí a pokuste se dokázat vztah $R_k(3, \ldots, 3) \leq 1 + k \cdot R_{k-1}(3, \ldots, 3)$.

(b) (*) Najděte obarvení hran třemi barvami úplného grafu na 16 vrcholech, ve kterém není jednobarevný trojúhelník, neboli $R_3(3, 3, 3) \geq 17$.

Příklad 4. *Ukažte, že $R_2(C_4, C_4) = 6$, tedy že v každém červeno-modrém obarvení hran K_6 najdeme jednobarevný 4-cyklus, zatímco na K_5 se to už podařit nemusí.*

Příklad 5 (*)**.** *Dokažte, že pro každé přirozené $k \geq 2$ platí vztah*

$$2^{k/2} \leq R_2(k, k) \leq 2^{2k}.$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/