Základy kombinatoriky a teorie grafů
Zadání domácích úkolů

22. května 2014

1 Zadáno 3. 3. 2014

Říkáme, že grafy G a H jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f\colon V(G) \to V(H)$ taková, že platí $\{u, v\} \in E(G)$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$. Neboli grafy jsou isomorfní, pokud se liší jen přejmenováním vrcholů. Graf H je *doplňkem grafu* G, pokud $\{u, v\} \in E(H)$ právě tehdy, když $\{u, v\} \notin E(G)$. Doplněk grafu G obvykle značíme $\overline{G}$.

Příklad 1. *Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému dopňku.* **[3]**

Příklad 2. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n uvažujme síť se zdrojem $z = (0, 0, ..., 0)$ a stokem $s = (1, 1, ..., 1)$, kde všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Sestrojte*

(a) celočíselný maximální tok. **[1]**

(b) maximální tok, který je na všech hranách kladný. **[1]**

Příklad 3. *Pro grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ označme jako $G_1 \times G_2$ graf s množinou vrcholů $V_1 \times V_2$, kde vrcholy (u, u') a (v, v') jsou spojené hranou, pokud $\{u, v\} \in E_1$ a $\{u', v'\} \in E_2$. Ukažte, že pro cykly C_1 a C_2 je graf $C_1 \times C_2$ je souvislý právě tehdy, když nejsou oba sudé.* **[2]**

Příklad 4. *Dokažte, že hrany každého grafu lze zorientovat tak, že vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu se liší nejvýše o jedna.* **[2]**

2 Zadáno 26. 3. 2014

Příklad 5. *Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$. Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$.* **[3]**

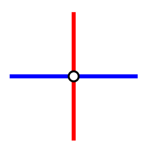
Příklad 6. *Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven. Hint: použijte fakt, že rovinný graf $G = (V, E)$ bez trojúhelníků má nanejvýš $2|V| - 4$ hran.* **[4]**

Příklad 7. *Dokažte, že K_n lze rozložit na hranově disjunktní cesty délky 2 právě tehdy, když $n = 4k$ nebo $n = 4k + 1$ pro $k \in \mathbb{N}$.* **[3]**

Příklad 8. *Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) grafy K_7 a $K_{3,6}$ bez křížení hran.* **[2+2]**

3 Zadáno 9. 4. 2014

Příklad 9. *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.* **[5]**



Obrázek 1: Separující se jednobarevné páry hran.

Příklad 10. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Najděte rovinné nakreslení grafu jeho doplňku na co nejvíce vrcholech.* **[3]**

Příklad 11. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.* **[3]**

Příklad 12. *Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení hran:*

(a) K_8, **[2]**

(b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**

Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $e \leq v + f$ (rovnost by platila pro nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna je rovinná).

4 Zadáno 20. 4. 2014

Příklad 13. *Graf G je kriticky k-obarvitelný, pokud $\chi(G) = k$ a každý jeho podgraf $H \subset G$ je již $(k-1)$-obarvitelný. Nechť $\delta(H)$ označuje minimální stupeň grafu H.*

(a) Ukažte, že je-li H kriticky k-obarvitelný, tak $\delta(H) \geq k - 1$. **[2]**

(b) Ukažte, že pro každý graf G platí $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. Neboli, že neexistuje graf velké barevnosti, ve kterém mají všechny podgrafy malý minimální stupeň. **[3]**

Příklad 14. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte bez použití Věty o čtyřech barvách, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.* **[4]**

Příklad 15. *Nalezněte grafy (a jejich seznamy povolených barev) s omezenou barevností, ale libovolně velkou vybíravostí.* **[3]**

Příklad 16. *Nalezněte rovinný graf (se seznamy povolených barev), který není 4-vybíratelný.* **[4]**

5 Zadáno 8. 5. 2014

Příklad 17 (Schurova věta). *Ukažte, že existuje dost velké $N \in \mathbb{N}$ takové, že obarvíme-li prvky $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ dvěma barvami, pak vždy dokážeme najít $x, y, z \in [N]$, které mají stejnou barvu a platí $x + y - z$ (tj. jednobarevné řešení rovnice).* **[3]**

Hint: Zvolte $N = R_2(3, 3) - 1$ a sestrojte vhodný hranově 2-obarvený graf, zbytek z Ramseyovy věty pro grafy.

Příklad 18. *(a) Uvažme obarvení bodů roviny $\mathbb{R}^2$ třemi barvami. Ukažte, že potom vždy dokážeme nalézt dva body stejné barvy, které jsou od sebe ve vzdálenosti jedna.* **[3]**

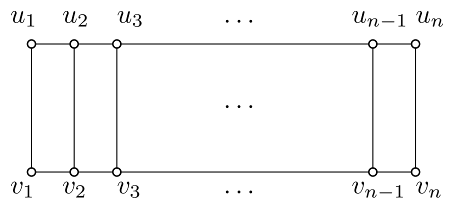
(b) Ukažte, že existuje 2-obarvení bodů roviny, ve kterém není jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranami jednotkové délky. **[3]**

Příklad 19. *Jaká je vytvořující funkce pro počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B? Dokážete tento počet odvodit?* **[3]**

Příklad 20. *Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.* **[3]**

Příklad 21. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel. Jaký je počet rozkladů n, pokud rozlišujeme pořadí sčítanců?* **[3]**

Příklad 22. *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?* **[4]**



6 Zadáno 20. 5. 2014

Příklad 23. *Určete počet perfektních párování v žebříku* Z_n*:* **[2]**

Příklad 24. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní* n*-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 25. *Nechť* e_n *značí počet permutací množiny* $\{1, 2, \dots, n\}$*, které mají pouze cykly sudé délky. Podobně* o_n *označuje počet permutací, jejichž cykly mají pouze liché délky. Ukažte, že platí* $e_{2n} = o_{2n}$*.* **[6]**

Příklad 26. *Nechť* $(X, \mathcal{L})$ *je konečná projektivní rovina. Definujme duál této roviny jako množinový systém nad množinou* $\mathcal{L}$*, jehož množiny jsou tvaru* $\{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\}$ *pro každé* $x \in X$*. Ukažte, že duál konečné projektivní roviny je opět konečná projektivní rovina.* **[2]**

Příklad 27. *Nechť* X *je konečná množina a* $\mathcal{M} \subseteq 2^X$*. Řekneme, že množinový systém* $\mathcal{M}$ *je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky* X *dvěma barvami tak, aby každá množina z* $\mathcal{M}$ *obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.* **[3]**

Příklad 28. *Ukažte, že až na isomorfismus je Fanova rovina jediná konečná projektivní rovina řádu dva.* **[3]**