Základy kombinatoriky a teorie grafů – 9. cvičení*

15. dubna 2014

1 Barevnost grafů

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \dots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* G=(V,E), pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. *Barevnost grafu* G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G. Velikost největší *nezávislé množiny* grafu G, neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme $\alpha(G)$.

Příklad 1. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 2. *Pro každý graf s n vrcholy a m hranami zkuste ukázat následující odhady barevnosti:*

(a) $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

(b) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

(c) $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Příklad 3. *Graf G je kriticky k-obarvitelný, pokud $\chi(G) = k$ a každý jeho podgraf $H \subset G$ je již $(k-1)$-obarvitelný. Nechť $\delta(H)$ označuje minimální stupeň grafu H.*

(a) Ukažte, že je-li H kriticky k-obarvitelný, tak $\delta(H) \geq k - 1$.

(b) Ukažte, že pro každý graf G platí $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. Neboli, že neexistuje graf velké barevnosti, ve kterém mají všechny podgrafy malý minimální stupeň.

Příklad 4. *Máme-li pořadí vrcholů $v_1, \dots, v_n$ grafu G a množinu barev $\{1, 2, \dots, k\}$, tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.*

(a) Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije $\chi(G)$ barev.

(b) Ukažte, že existuje strom T a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje $\Omega(\log n)$ barev.

Příklad 5. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte bez použití Věty o čtyřech barvách, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 6 (*). *Mějme nekonečný graf G s množinou vrcholů $V = \mathbb{R}^2$, kde dva vrcholy spojíme hranou právě tehdy, když jsou od sebe ve vzdálenosti přesně jedna. Ukažte, že $4 \leq \chi(G) \leq 7$.*

2 Vybíravost grafů

Máme-li ke každému vrcholu v grafu G přiřazený povolený seznam barev $L(v)$, pak řekneme, že G je L-*obarvitelný*, pokud jej lze obarvit pouze povolenými barvami ze seznamů L. Graf je k-*vybíratelný*, pokud je L-obarvitelný pro libovolné přiřazení seznamů L takové, že každý seznam obsahuje alespoň k barev. *Vybíravost grafu* G, což je nejmenší k, pro který je G k-vybíratelný, značíme $\chi_l(G)$.

Příklad 7. *Nalezněte grafy (a jejich seznamy povolených barev) s omezenou barevností, ale libovolně velkou vybíravostí.*

Příklad 8. *Nalezněte rovinný graf (a jeho seznamy povolených barev), který není 4-vybíratelný.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/