Základy kombinatoriky a teorie grafů – 8. cvičení*

8. dubna 2014

1 Rovinné grafy podruhé

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G.

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* $G=(V,E)$, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. *Barevnost grafu* G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G.

Věta (Eulerova formule)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Důsledek. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$, potom pro $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.*

Věta (Věta o čtyřech barvách)**.** *Každý rovinný graf G splňuje $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení.*

(a) Zkuste dokázat vzoreček $e \leq 2v - 4$ pro rovinné grafy bez K_3 a s $v \geq 3$. Je odhad nejlepší možný?

(b) Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d-regulární rovinný graf? Jak velké d má ještě smysl uvažovat? Co když navíc zakážeme trojúhelníky?

Příklad 2. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Pro jaká k je Q_k ještě rovinný?*

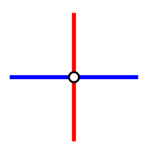
Příklad 3. *Buď G rovinný graf neobsahující K_3. Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 4. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 5. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Na kolika nejvíce vrcholech dokážete najít rovinný graf s rovinným doplňkem?*

Příklad 6. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 7 (*)**.** *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.*



Obrázek 1: Separující se jednobarevné páry hran.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/