Základy kombinatoriky a teorie grafů – 6. cvičení*

25. března 2014

1 Rovinné grafy a jejich vlastnosti

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G. Graf H je *podrozdělením* grafu G, pokud jej lze vytvořit z G nahrazením některých hran za cesty.

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* $G=(V,E)$, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. *Barevnost grafu* G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G.

Věta (Eulerova formule)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Věta (Věta o čtyřech barvách)**.** *Každý rovinný graf G splňuje $\chi(G) \leq 4$.*

Věta (Kuratowského věta)**.** *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení.*

(a) Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.

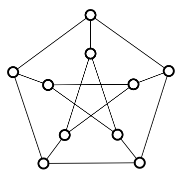
(b) Zkuste dokázat vzoreček $e \leq 2v - 4$ pro rovinné grafy bez K_3 a s $v \geq 3$. Jsou odhady nejlepší možné?

(c) Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d-regulární rovinný graf? Jak velké d má ještě smysl uvažovat?

Příklad 2. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5, K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 3. *Buď G rovinný graf neobsahující K_3. Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 4. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 5. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 6. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný.*

Příklad 7. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami. Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 8 (*)**.** *Dokažte, že hrany 4-regulárního rovinného grafu nelze obarvit dvěma barvami tak, aby každý vrchol sousedil se dvěma červenými a dvěma modrými barvami tak, že jednobarevné páry hran se navzájem separují.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/