Základy kombinatoriky a teorie grafů – 5. cvičení*

18. března 2014

1 Grafová souvislost podruhé

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost grafu* $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G. Značíme ji $k_e(G)$. *Vrcholová souvislost grafu* $G = (V, E)$ definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf, a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Značíme ji $k_v(G)$.

Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé jeho dva vrcholy u a v existují orientované cesty z u do v a z v do u. Jako *most* označujeme hranu, po jejímž odstranění vzroste počet komponent souvislosti.

Příklad 1. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 2. *Souvislost v k-regulárních grafech.*

(a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý.

(b) Je pro $k \geq 2$ každý k-regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

(c) Co když v příkladu nahradíme vrcholovou souvislost hranovou?

Příklad 3. *Řekneme, že dvě hrany e a f hranově 2-souvislého grafu G jsou ekvivalentní, pokud se rovnají, nebo po jejich odstranění není vzniklý graf souvislý. Ukažte, že*

(a) se skutečně jedná o relaci ekvivalence.

(b) všechny hrany ve stejné třídě ekvivalence leží na cyklu (který může obsahovat i další hrany).

(c) po odstranění hran ležících v téže třídě ekvivalence P dostaneme graf, jehož netriviální komponenty jsou hranově 2-souvislé.

(d) kontrahováním každé komponenty grafu $G - P$ do jednoho vrcholu dostaneme cyklus.

Příklad 4 (Robbinsova věta)**.** *Dokažte, že hrany grafu G lze zorientovat tak, že výsledný $\overrightarrow{G}$ je silně souvislý právě tehdy, když G je hranově 2-souvislý. Hint: může se hodit použití předešlého příkladu.*

Příklad 5 (*)**.** *Pro $k \geq 2$ ukažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu leží každých k vrcholů na společném cyklu.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/