Základy kombinatoriky a teorie grafů – 4. cvičení*

11. března 2014

1 Aplikace Hallovy věty

Příklad 1. *Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ je matice $L \in \{1, \dots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Latinský čtverec řádu n je latinský obdélník řádu $n \times n$.*

(a) Ukažte, že každý latinský obdélník lze přidáváním řádků doplnit na latinský čtverec.

(b) Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\frac{(n!)^2}{e}$.

Příklad 2. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

Příklad 3 (*). *Dokažte, že hrany každého rovinného grafu bez trojúhelníků lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vedou nejvýše dvě šipky ven.* Rovinný graf *je takový graf, který jde nakreslit do roviny bez křížení hran. Hint: použijte fakt, že rovinný graf $G = (V, E)$ bez trojúhelníků má nanejvýš $2|V| - 4$ hran.*

2 Grafová souvislost

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost grafu* $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G. Značíme ji $k_e(G)$. *Vrcholová souvislost grafu* $G = (V, E)$ definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf, a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Značíme ji $k_v(G)$.

Z přednášky víte, že odebráním hrany se vrcholová ani hranová souvislost nemůže změnit o víc jak o jedničku.

Příklad 4. *Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že*

(a) hranová souvislost klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.

(b) vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 5. *(a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý.*

(b) Je pro $k \geq 2$ každý k-regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

Příklad 6. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/