Základy kombinatoriky a teorie grafů – 3. cvičení*

4. března 2014

1 Toky v sítích

Příklad 1. *Jakých hodnot může nabývat počet maximálních toků v síti?*

Příklad 2. *Musí být každý tok součtem toků po orientovaných z, s-cestách (ne nutně disjunktních)?*

Příklad 3. *(Königova věta) Vrcholové pokrytí grafu G je podmnožina vrcholů U taková, že každá hrana G je incidentní aspoň s jedním vrcholem z U. Ukažte, že v každém bipartitním grafu je velikost maximálního párování rovna velikosti minimálního vrcholového pokrytí.*

2 Aplikace Hallovy věty

Nechť X a I jsou množiny. *Množinovým systémem na X* nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i \mid i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. (V množinovém systému podle této definice se tatáž množina může opakovat.) *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Budeme uvažovat $X, I \subset \mathbb{N}$ a všechny M_i konečné.

Věta (Hallova věta). *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{i \in J} M_i\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.*

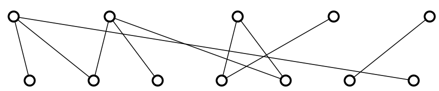
Příklad 4. *Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.*

(a) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?

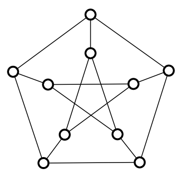
(b) Mají všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 5. *Párování v grafu G je množina hran $F \subseteq E(G)$ taková, že, každý vrchol grafu G patří do nejvýše jedné hrany z F. Perfektní párování grafu G je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu G.*

(a) Najděte největší párování v tomto bipartitním grafu.



(b) Najděte šest různých perfektních párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.



(c) Dokažte, že je-li bipartitiní graf s neprázdnou množinou hran k-regulární, pak má perfektní párování.

Příklad 6. *Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ je matice $L \in \{1, \ldots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou. Latinský čtverec řádu n je latinský obdélník řádu $n \times n$.*

(a) Ukažte, že každý latinský obdélník lze přidáváním řádků doplnit na latinský čtverec.

(b) Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\frac{(n!)^2}{e}$.

Příklad 7. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/