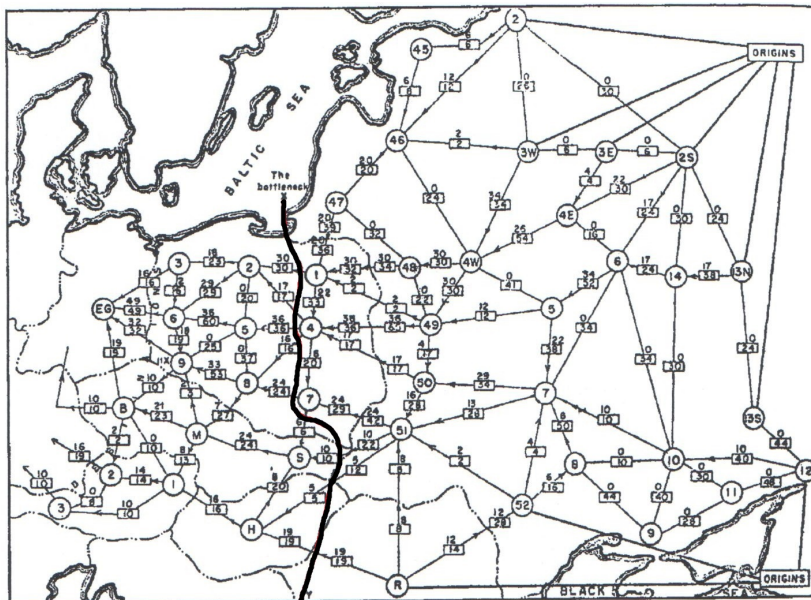


Základy kombinatoriky a teorie grafů – 2. cvičení*

24. února 2014

1 Toky v sítích



Železniční síť střední a východní Evropy sestavená v 50. letech armádou USA podle zpráv C.I.A. Každá hrana má vyznačený směr, kterým jezdí vlaky, a nosnost. Minimální řez sítí (s hodnotou 163 000 tun) je vyznačený. Ford s Fulkersonem tuto zprávu uvádějí jako motivaci svého výzkumu.

Síť G je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim zdroj a stok) a kapacita $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{(x,u) \in E} f(x,u) = \sum_{(u,y) \in E} f(u,y)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. Velikost toku je $|f| = \sum_{(z,x) \in E} f(z,x) - \sum_{(x,z) \in E} f(x,z)$. Cesta (ne nutně orientovaná) je nasycená, pokud pro nějakou její hranu e orientovanou po směru cesty je $f(e) = c(e)$ nebo pro nějakou její hranu e orientovanou proti směru cesty je $f(e) = 0$. Zlepšující cesta je cesta, která není nasycená. Pokud jako rezervu hrany označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru cesty a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru cesty, pak je cesta nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy.

Algoritmus 1.1: FORDFULKERSON(G)

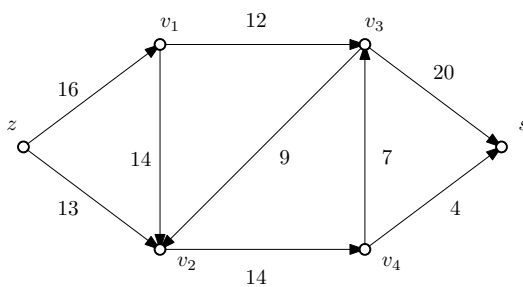
$f \leftarrow$ nulový tok

while existuje zlepšující cesta P ze z do s

do $\left\{ \begin{array}{l} \text{Bud } P \text{ nějaká taková cesta.} \\ \epsilon \leftarrow \min_{e \in P} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon \text{ (každé hraně } e \in P \text{ zvětšíme} \\ f(e), \text{ případně zmenšíme } f(e'), \text{ podle toho, co jde).} \end{array} \right.$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Najděte Ford-Fulkersonovým algoritmem maximální tok v následující síti.



Příklad 2. (a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 3. Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?