Základy kombinatoriky a teorie grafů – 14. cvičení*

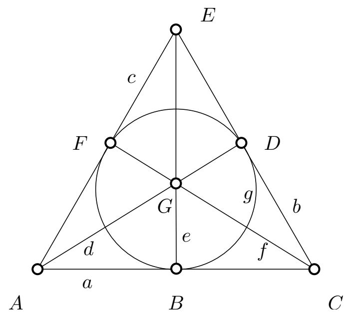
19. května 2014

1 Konečné projektivní roviny podruhé

Nechť X je konečná množina a $\mathcal{L} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{L})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

1. $\exists F \subseteq X, |F| = 4 \forall : |L \cap F| \leq 2$ (existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou kolineární).
2. $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \neq L_2 : |L_1 \cap L_2| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
3. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists! L \in \mathcal{L} : x_1, x_2 \in L$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

Řád projektivní roviny $(X, \mathcal{L})$ se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (z minula víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Příkladem konečné projektivní roviny (řádu 2) je *Fanova rovina*:



Příklad 1. *V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním za koupení jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla. Kolik lístků si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?*

Příklad 2. *Ukažte, že v konečné projektivní rovině řádu n*

(a) pro libovolný bod existuje přímka, která jej neobsahuje.

(b) prochází každým bodem právě $n + 1$ přímek.

(c) je celkový počet bodů právě $n^2 + n + 1$.

Příklad 3. *Nechť $(X, \mathcal{L})$ je konečná projektivní rovina. Definujme duál této roviny jako množinový systém nad množinou $\mathcal{L}$, jehož množiny jsou tvaru $\{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\}$ pro každé $x \in X$. Ukažte, že duál konečné projektivní roviny je opět konečná projektivní rovina.*

Příklad 4. *Nechť X je konečná množina a $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Řekneme, že množinový systém $\mathcal{M}$ je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky X dvěma barvami tak, aby každá množina z $\mathcal{M}$ obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.*

Příklad 5. *Ukažte, že až na isomorfismus je Fanova rovina jediná konečná projektivní rovina řádu dva.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/