

Základy kombinatoriky a teorie grafů – 13. cvičení*

13. května 2014

1 Latinské čtverce

Latinský čtverec řádu n je matice o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \dots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \dots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ Latinských čtverců je množinou *navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální.

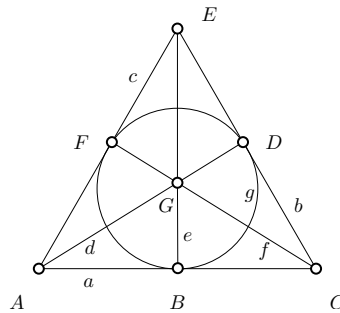
Příklad 1. Nalezněte maximální množinu navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu čtyři a dokažte, že je maximální.

2 Konečné projektivní roviny

Nechť X je konečná množina a $\mathcal{L} \subseteq 2^X$. Potom dvojici (X, \mathcal{L}) nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

1. $\exists F \subseteq X, |F| = 4 \forall : |L \cap F| \leq 2$ (existují čtyři body, z nichž žádné tři nejsou kolineární).
2. $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}, L_1 \neq L_2 : |L_1 \cap L_2| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
3. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \exists! L \in \mathcal{L} : x_1, x_2 \in L$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

Řád projektivní roviny (X, \mathcal{L}) se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také každý bod leží na $n + 1$ přímkách. Příkladem konečné projektivní roviny (řádu 2) je *Fanova rovina*:



Příklad 2. Pro každý axiom konečných projektivních rovin uvažte, jaké nové konfigurace mohou vzniknout, pokud jej vynecháme.

Příklad 3. Nechť (X, \mathcal{L}) je konečná projektivní rovina. Definujme duál této roviny jako množinový systém nad množinou \mathcal{L} , jehož množiny jsou tvaru $\{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\}$ pro každé $x \in X$. Ukažte, že duál konečné projektivní roviny je opět konečná projektivní rovina.

Příklad 4. Pokuste se nakreslit konečnou projektivní rovinu řádu 3.

Příklad 5. Ukažte, že až na isomorfismus je Fanova rovina jediná konečná projektivní rovina řádu dva.

Příklad 6. Nechť X je konečná množina a $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Řekneme, že množinový systém \mathcal{M} je 2-obarvitelný, pokud lze obarvit prvky X dvěma barvami tak, aby každá množina z \mathcal{M} obsahovala prvky obou barev. Ukažte, že Fanova rovina není 2-obarvitelná.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>