Základy kombinatoriky a teorie grafů – 12. cvičení*

5. května 2014

1 Vytvořující funkce – aplikace

(Obyčejnou) vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$. *Exponenciální vytvořující funkcí* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Například funkce e^x je exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$. Nechť $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, a_1\alpha, a_2\alpha^2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x)-a_0-\cdots-a_k x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1} \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Příklad 1. *Kolika způsoby můžeme naplnit košík n kousky ovoce (jablka, hrušky, banány a pomeranče) tak, aby počet jablek byl sudý, počet banánů byl násobek pěti a v košíku byly nanejvýš čtyři pomeranče a nanejvýš jedna hruška?*

Příklad 2. *V USA mají mince těchto typů: 1, 5, 10, 25, 50 centy a \$1. Nalezněte vytvořující funkci $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde a_i je počet způsobů, kolika se dá americkými mincemi zaplatit i centů.*

Příklad 3. *Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$.*

Příklad 4. *Rozklad čísla $n \in \mathbb{N}$ je zápis n jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).*

(a) Nechť a_n značí počet rozkladů čísla n. Jaká je vytvořuující funkce pro posloupnost $(a_1, a_2, \ldots)$?

(b) Ukažte, že počet rozkladů n na liché části se rovná počtu rozkladů n na vzájemně různé části.

(c) Bonusová otázka: jaký je počet rozkladů n, pokud rozlišujeme pořadí sčítanců?

Příklad 5 (*)**.** *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?*

Příklad 6 (*)**.** *Nalezněte vytvořující funkci, jejíž koeficienty udávají počet 2-regulárních neorientovaných grafů na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ (vrcholy grafu jsou označené).*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/