

Základy kombinatoriky a teorie grafů – 11. cvičení*

29. dubna 2014

1 Vytvořující funkce – úvod

Příklad 1. (a) Mějme polynomy $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ a $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. Jaký je koeficient u členu x^7 v jejich součinu $p(x)q(x)$?

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

Příklad 2. V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků – větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole?

Věta (Binomická věta). Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

Příklad 3. Dokažte vztah $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná. Jako (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti (a_0, a_1, a_2, \dots) označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a podle binomické věty je $(1+x)^n$ vytvořující funkcí posloupnosti $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots)$. Přejít mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

Tvrzení. Bud' (a_0, a_1, \dots) posloupnost reálných čísel. Necht' existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro všechna n . Potom pro každé $x \in (\frac{-1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu. Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy a_0, a_1, \dots jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 4. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$,

(b) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$,

(c) $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$,

(d) $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$, tedy n -tý člen je součtem prvních n sudých přirozených čísel včetně nuly.

Příklad 5. Určete koeficient

(a) u x^{10} v $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$,

(b) u x^{2014} v $\sin(x)$.

Příklad 6 (Řešení rekurencí). Naleznete posloupnost (a_0, a_1, a_2, \dots) , která splňuje $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_0 = 1$.

Příklad 7. V USA mají mince těchto typů: 1, 5, 10, 25, 50 centy a \$1. Naleznete vytvořující funkci $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde a_i je počet způsobů, kolika se dá americkými mincemi zaplatit i centů.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>